



ЧИСЛЕННОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ В  
**ДИНАМИКЕ**  
ЖИДКОСТИ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР  
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ДИНАМИКЕ ЖИДКОСТИ

(Сборник научных трудов)

Под редакцией к.ф.-м.н. Б.Г.Кузнецова

Новосибирск - 1983

УДК 532.516

### П р е д и с л о в и е

В настоящем сборнике опубликованы работы научных сотрудников Института теоретической и прикладной механики СО АН СССР, которые посвящены вопросам численного моделирования течений идеальной жидкости, ламинарного и турбулентного пограничных слоев и течениям Навье-Стокса.

Сборник предназначен для специалистов по прикладной математике, механике жидкости и газа, научных работников, инженеров и аспирантов.

© ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ , 1983 г.

БИФУРКАЦИЯ И ПОЯВЛЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОГО  
РЕШЕНИЯ В ОДНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ,  
СВЯЗАННОЙ С ПЛОСКИМ ТЕЧЕНИЕМ ПУАЗЕЙЛЯ

Х.И. Христов, В.П. Нартов

Для течения вязкой жидкости между двумя параллельными пластинами (плоское течение Пуазейля) применяется принцип наименьшей диссипации. Минимум находится в классе точечных случайных функций. Поставлена краевая задача для ядер стохастических интегралов и предложен численный метод ее решения. Проведены расчеты для нескольких значений числа Рейнольдса, построенного по динамической скорости. Рассчитанные характеристики стохастического режима течения сравниваются с экспериментальными данными.

Неустойчивость и переход к турбулентности в плоском течении Пуазейля является основным вопросом теории гидродинамической устойчивости. На этой задаче были опробованы все теоретические подходы. Рейнольдс [1] неустойчивыми называл те течения, для которых можно найти возмущения с возрастающей энергией. Принимая, что возмущения принадлежат какому-то классу функций, он находил максимум функционала, представляющего производную по времени от полной энергии возмущений. Опп [2] развил подход Рейнольдса, минимизируя тот же самый функционал, но накладывая требование, чтобы возмущения удовлетворяли еще и граничным условиям. Он получил граничную задачу для возмущений. Зоммерфельд [3] впервые воспользовался самими уравнениями Навье-Стокса для исследования эволюции возмущений. Он поставил граничную задачу, которая несущественно отличалась от задачи Оппа. Впоследствии метод Зоммерфельда применялся многими авторами (смотри библиографию в [4]), которые решали

ли уравнения Орра-Зоммерфельда для плоского течения Пуазейля разными приближенными способами. Основная трудность на этом пути - это сложные нестационарные граничные задачи, которые надо решать.

Интерес к вариационному подходу в устойчивости в последнее время снова возрос. Малкус [5] предложил принцип максимальной диссипации энергии возмущений. Гольдштик [6] сформулировал принцип максимальной устойчивости осредненного течения и даже на его основе рассчитал константу Кармана для плоского течения Пуазейля. Христов [7] обосновал в полуэмпирическом ключе возможность существования принципа минимальной диссипации для плоского течения Пуазейля, а в работе Христова [4] показано, что на основе этого принципа хорошо предсказывается нижнее число Рейнольдса перехода к турбулентности в этом течении.

Преимущество вариационных подходов есть некая более простая формулировка граничных задач для возмущений, ибо в вариационном подходе принимают участие только осредненные характеристики. Например, уравнения Орра для возмущений стационарные, т.е. не содержат производных по времени. Основная идея вариационных методов - это отыскание нетривиального решения помимо всегда существующего тривиального решения, дающего ламинарный режим. То есть исследуется бифуркация решений, причем ответвленные решения ищутся в каком-то классе функций. Настоящая работа тоже связана с этим подходом. Здесь принимается принцип минимальной диссипации в качестве вариационного принципа, а классом функций для возмущений является множество Гауссовых случайных функций.

### ПРИНЦИП МИНИМАЛЬНОЙ ДИССИПАЦИИ

В работе Христова [7] был сформулирован минимальный принцип для турбулентного течения в плоском канале. Предполагается, что в плоском течении Пуазейля осуществляется только тот режим (ламинарный или турбулентный), который доставляет минимум функционала диссипации:

$$\int_0^H \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\bar{U}_x}{dy} \right)^2 + \varepsilon \right] dy = \min. \quad (I.I)$$

Здесь  $\bar{U}_x$  осредненная скорость в направлении оси канала,  $\nu$  - вязкость,  $H$  - полужирина канала,  $\varepsilon$  - плотность диссипации турбулентных пульсаций. Функционал (I.I) должен минимизироваться

ся при ограничении

$$\nabla \frac{d\bar{U}_x}{d\bar{y}} = -A\bar{y} + \overline{\bar{U}'_x \bar{U}'_y}, \quad (I.2)$$

которое является уравнением Рейнольдса для соответствующей компоненты скорости. Здесь  $A$  – модуль градиента давления порождающего течения, а  $\overline{\bar{U}'_x \bar{U}'_y}$  – Рейнольдсовое напряжение.

Вариационная задача (I.1)-(I.2) незамкнута, если не задана связь между турбулентной диссипацией и Рейнольдсовым напряжением. Принимая формулу Колмогорова для диссипации

$$\varepsilon = \frac{2}{3} \frac{\overline{\bar{U}'_x \bar{U}'_y}}{l^{3/2}} \quad (\bar{y} \geq 0), \quad (I.4)$$

уравнения Эйлера-Лагранжа для вариационной задачи (I.1)-(I.2) сводятся к одному уравнению, которое в ядре течения дает

$$\tau = \bar{y} = l^2 \left( \frac{d\bar{U}_x}{d\bar{y}} \right)^2. \quad (I.5)$$

Это не что иное как формула Прандтля (см. подробно в работе Христова, 1979). Верно также, что если профиль осредненной скорости связывается с полным напряжением по формуле Прандтля (I.5), то полная диссипация такого течения будет минимальной, если она, конечно, выражается формулой Колмогорова (I.4).

Другим основным аргументом в пользу принципа минимальной диссипации является удовлетворительное предсказание нижнего критического числа Рейнольдса для перехода ламинарного режима в турбулентный (см. Христов, 1982).

Итак, принципом наименьшей диссипации можно пользоваться в двух направлениях: для предсказания нижнего критического числа Рейнольдса, во-первых, и для расчета профилей осредненной скорости и напряжения, во-вторых. Для этого, однако, надо иметь связь между диссипацией пульсаций и Рейнольдсовым напряжением.

### КЛАСС ГАУССОВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИОНАЛА ДИССИПАЦИИ

Будем отыскивать минимум функционала (I.1) при ограничении (I.2) в классе гауссовых случайных функций. Последний характеризуется тем, что осредненные величины зависят только от поперечной переменной  $y$ , а по  $x$  это однородные случайные функции. Тогда, следя Винеру, [8] имеем

$$U'_x = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(y, \xi) f(x - \xi) d\xi , \quad (2.1)$$

$$U'_y = \int_{-\infty}^{\infty} K_y(y, \xi) f(x - \xi) d\xi , \quad (2.2)$$

где  $K_x, K_y \in L^2_{\xi}(-\infty, \infty)$ ,  $f$  - гауссовый белый шум (производная Винерова процесса), т.е.

$$\begin{aligned} \langle f(x) \rangle &= 0 , \\ \langle f(\xi) f(x + \xi) \rangle &= L^2 \delta(x) , \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $\delta(x)$  - дельта-функция Дирака, а  $\langle \cdot \rangle$  означает осреднение по ансамблю.

Здесь надо подчеркнуть, что описываемый класс случайных функций очень узок и имеет только отдаленное отношение к турбулентности. Здесь не рассматривается третья компонента скорости, стохастичность по координате  $Y$  вносится за счет стохастичности по  $X$  и т.п. Решение поставленной задачи, однако, имеет очень глубокое фундаментальное значение, ибо выясняется факт сможет ли какое-либо стохастическое решение привести к суммарной диссипации, меньшей чем диссипация ламинарного течения.

Легко показывается, что (см. Винер, 1958)

$$\frac{\partial U'_x}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial K_x(y, \xi)}{\partial \xi} f(x - \xi) d\xi , \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial U'_y}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial K_y(y, \xi)}{\partial \xi} f(x - \xi) d\xi .$$

Очевидно тоже, что

$$\frac{\partial U'_x}{\partial y} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial K_x(y, \xi)}{\partial y} f(x - \xi) d\xi , \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial U'_y}{\partial y} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial K_y(y, \xi)}{\partial y} f(x - \xi) d\xi .$$

Для плотности диссипации имеем (по определению):

$$\varepsilon = 2\nu \left\{ \langle \left( \frac{\partial U'_x}{\partial x} \right)^2 \rangle + \langle \left( \frac{\partial U'_y}{\partial y} \right)^2 \rangle + \frac{1}{2} \langle \left( \frac{\partial U'_x}{\partial y} + \frac{\partial U'_y}{\partial x} \right)^2 \rangle \right\} .$$

Представляя сюда (2.4) и (2.5) и учитывая свойства Гауссова белого шума  $f$  получаем:

$$\mathcal{E} = 2\sqrt{L^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left( \frac{\partial K_x}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial K_y}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial K_x}{\partial \eta} + \frac{\partial K_y}{\partial \xi} \right)^2 \right] d\xi. \quad (2.6)$$

Совершенно аналогично получается, что

$$\langle u'_x u'_y \rangle = L^2 \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\eta, \xi) K_y(\eta, \xi) d\xi. \quad (2.7)$$

В обеих этих формулах  $L^2$  имеет размерность длины, которая неявно содержится в функции  $f(x)$  (см. (2.3)) и связана с числом импульсов и их амплитудой на единице длины. Константу  $L$  можно брать равной единице, ибо ее можно внести в  $K_x$  и  $K_y$ .

Итак, (I.1) сводится к функционалу

$$\int_0^H \left\{ \sqrt{\left( \frac{d\bar{U}_x}{d\eta} \right)^2 + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left( \frac{\partial K_x}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial K_y}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial K_x}{\partial \eta} + \frac{\partial K_y}{\partial \xi} \right)^2 \right] d\xi} \right\} d\eta = \min, \quad (2.8)$$

который минимизируется при ограничениях

$$\sqrt{\frac{d\bar{U}_x}{d\eta}} = -A_y + L^2 \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\eta, \xi) K_y(\eta, \xi) d\xi. \quad (2.9)$$

Здесь добавляется еще одно ограничение, а именно уравнение неразрывности для компоненты пульсационной скорости. Переписав его при помощи (2.4) и (2.5), умножая на  $f(x)$  и осредняя, имеем

$$\frac{\partial K_x}{\partial \xi} + \frac{\partial K_y}{\partial \eta} = 0. \quad (2.10)$$

Вариационная задача (2.8)-(2.10) есть стохастическая реализация принципа наименьшей диссипации (I.1), (I.2).

### УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ЛАГРАНЖА

Функционал (2.8) и ограничение (2.9) не являются однородными по отношению к переменным. Чтобы привести задачу к классическому виду проще ввести функцию  $F(\xi)$ , обладающую свойством

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) d\xi = 1.$$

Тогда (2.8) будет

$$\int_0^{\infty} \int \left\{ \gamma F(\xi) \left( \frac{d\bar{U}_x}{dy} \right)^2 + 2L^2 \gamma \left[ \left( \frac{\partial K_x}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial K_y}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial K_x}{\partial y} + \frac{\partial K_y}{\partial \xi} \right)^2 \right] \right\} d\xi dy = \min, \quad (3.1)$$

а (2.9) - соответственно

$$\gamma \frac{d\bar{U}_x}{dy} F(\xi) + A_y F(\xi) - L^2 F(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} K_x(y, \xi) K_y(y, \xi) d\xi = 0. \quad (3.2)$$

(2.10) просто перепишем

$$\frac{\partial K_x}{\partial \xi} + \frac{\partial K_y}{\partial y} = 0. \quad (3.3)$$

Теперь можно ввести множители Лагранжа, чтобы учесть ограничения (3.3) и (3.2). Функционал принимает вид:

$$\int_0^{\infty} \int \left\{ F(\xi) \gamma \left( \frac{d\bar{U}_x}{dy} \right)^2 + 2L^2 \gamma \left[ \left( \frac{\partial K_x}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial K_y}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial K_x}{\partial y} + \frac{\partial K_y}{\partial \xi} \right)^2 + \lambda_1 \left[ \gamma \frac{d\bar{U}_x}{dy} F(\xi) + A_y F(\xi) - L^2 K_x K_y \right] + \lambda_2 \left[ \frac{\partial K_x}{\partial \xi} + \frac{\partial K_y}{\partial y} \right] \right] \right\} d\xi dy.$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа имеют вид:

$$4\gamma L^2 \frac{\partial^2 K_x}{\partial \xi^2} + 2\gamma L^2 \frac{\partial^2 K_x}{\partial y^2} + 2\gamma L^2 \frac{\partial^2 K_y}{\partial \xi \partial y} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial \xi} + \lambda_1 L^2 K_y = 0,$$

$$2\gamma L^2 \frac{\partial^2 K_y}{\partial \xi^2} + 4\gamma L^2 \frac{\partial^2 K_y}{\partial y^2} + 2\gamma L^2 \frac{\partial^2 K_x}{\partial \xi \partial y} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} + \lambda_1 L^2 K_x = 0,$$

$$\frac{d}{dy} \left[ \gamma F(\xi) 2 \frac{d\bar{U}_x}{dy} + \lambda_1 F(\xi) \right] = 0.$$

К этим уравнениям надо присоединить (3.2) и (3.3) для определения множителей Лагранжа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Подставляя (3.3) в первые два уравнения получим:

$$2\gamma \left( \frac{\partial^2 K_x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 K_x}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{L^2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \xi} + \lambda_1 K_y = 0, \quad (3.4)$$

$$2\nu \left( \frac{\partial^2 K_y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 K_y}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{L^2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} + \lambda_1 K_x = 0 . \quad (3.5)$$

Третье уравнение можно проинтегрировать по  $y$ . Из соображений симметрии константу интегрирования можно принять равной нулю, т.е.

$$\lambda_1 = -2 \frac{d \bar{U}_x}{dy} . \quad (3.6)$$

Если сократить  $F(\xi)$  в (3.2), то (3.2)-(3.6) составляют полную систему для определения пяти неизвестных функций  $\bar{U}_x$ ,  $K_y$ ,  $K_x$ ,  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Здесь  $\lambda_2$  играет ту же роль, что и давление в несжимаемой жидкости. Тогда  $\lambda_2$  можно исключить при помощи "функции тока" :

$$K_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} , \quad K_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} . \quad (3.7)$$

Дифференцируя (3.4) по  $y$ , а (3.5) по  $\xi$  и вычитая, получим

$$\nu \Delta \Delta \Psi = \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_1 \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \lambda_1 \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) ,$$

где

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} .$$

$$\text{Подставляя сюда (3.6) имеем } \nu \Delta \Delta \Psi = - \left[ 2 \frac{d \bar{U}_x}{dy} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial y} + \frac{d^2 \bar{U}_x}{dy^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right] . \quad (3.8)$$

Для получения полной системы надо добавить (3.2) переписанное в терминах "функции тока":

$$\nu \frac{d \bar{U}_x}{dy} = -A_y - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} d\xi . \quad (3.9)$$

Границные условия по  $y$  выражают, что пульсации скорости затухают на границе канала

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \quad \text{для } y = \pm H . \quad (3.10)$$

Границных условий по  $\xi$  нет, зато должно выполняться условие ограниченности на бесконечность в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right] d\xi < +\infty . \quad (3.II)$$

Удобно ввести следующие безразмерные переменные

$$\Psi = \sqrt{\frac{y}{2U_*}} \Psi', y = y/H, \xi = \xi/H, Re = Hu^*/\nu, \bar{U}_x = u^* u',$$

где  $u^* = \sqrt{A/H}$  - динамическая скорость. Тогда

$$\frac{1}{Re} \Delta \Delta \Psi' = - \left[ 2 \frac{du'}{dy'} \cdot \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial \xi' \partial y'} + \frac{d^2 u'}{dy'^2} \cdot \frac{\partial \Psi'}{\partial \xi'} \right] , \quad (3.I2)$$

$$\frac{1}{Re} \frac{du'}{dy} = - y' - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Psi'}{\partial y'} \cdot \frac{\partial \Psi'}{\partial \xi'} d\xi' , \quad (3.I3)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \Psi'}{\partial \xi} = \frac{\partial \Psi'}{\partial y'} = 0 \text{ для } y' = \pm 1 , \quad (3.I4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left( \frac{\partial \Psi'}{\partial \xi'} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi'}{\partial y'} \right)^2 \right] d\xi' < +\infty , \quad (3.I5)$$

составляют граничную задачу, которую надо решить. Далее все штрихи будут опущены.

Для удобства "сожмем" интервал  $[-\infty, \infty]$  в интервал  $[-1, 1]$  при помощи преобразования

$$\eta = \frac{2}{\pi} \arctg \xi . \quad (3.I6)$$

Тогда, очевидно,

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{2}{\pi} \left[ \cos\left(\frac{\pi \eta}{2}\right) \right]^2 \frac{\partial}{\partial \eta} , \quad \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} = \frac{4}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi \eta}{2}\right) \frac{\partial}{\partial \eta} \cos\left(\frac{\pi \eta}{2}\right) \frac{\partial}{\partial \eta} .$$

Последнее указывает на то, что уравнения остаются в дивергентном виде. Граничную задачу (3.I2)-(3.I3) заменим следующей:

$$\frac{1}{Re} \Delta \Delta \Psi = - \frac{2}{\pi} \left[ \cos\left(\frac{\pi \eta}{2}\right) \right]^2 \cdot \left[ 2 \frac{du}{dy} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta \partial y} + \frac{d^2 u}{dy^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right] , \quad (3.I7)$$

$$\frac{1}{Re} \frac{dy}{dy} = -y - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy , \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \quad \text{для } y = \pm 1 , \quad (3.19)$$

$$\Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} = 0 \quad \text{для } \eta = \pm 1 , \quad (3.20)$$

где  $\Delta \equiv \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{4}{\pi^2} \cos^2\left(\frac{\pi y}{2}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \cos^2\left(\frac{\pi \eta}{2}\right)$ .

#### 4. МЕТОД ОТЫСКАНИЯ НЕТРИВИАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Уравнение (3.17) разобьем на два введением функции "вихря"  $\omega$ , добавив в уравнение для  $\omega$  производную по фиктивному времени  $t$

$$-\frac{\partial \omega}{\partial t} + \Delta \omega = Re \cdot \frac{2}{\pi} \left[ \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) \right]^2 \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial \eta} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2 \partial \eta} \right] , \quad (4.1)$$

$$\Delta \Psi = -\omega . \quad (4.2)$$

Расчетная область показана на рис. 2. Там же выписаны граничные условия. Ниже будет обоснован выбор граничных условий на оси канала. Сетка принимается согласованной  $\eta = i h_y$  и  $y = \sum h_y j$ , где  $h_y = 1/(M-1)$ ,  $i = -M, \dots, M$  причем сетка по  $y$  с переменным шагом  $h_{yj} = h_y(y)$  сгущается вблизи стенок по закону [9] :

$$y_j = 1 - [\exp[(1-j/N) \times l_h [C_1/(1+C_2) + 1] - 1] \times ((1-j/N) + C_2)/C_1, \\ j = 0, \dots, N \quad C_2 = 0.4 \quad C_1 = 5,400 \quad (\text{для } Re << 2340 \text{ и } Re = 2340).$$

Составляющие оператора  $\Delta$  аппроксимировались, соответственно:

$$\Delta_{\eta\eta} \Psi = \frac{4}{\pi^2} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \eta_i\right) \cdot \left[ \left( \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \eta_{i+1}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \eta_i\right) \right) \times \right. \\ \left. \times \left( \Psi_{i+1,j} - \Psi_{i,j} \right) - \left( \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \eta_i\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \eta_{i-1}\right) \right) \times \left( \Psi_{ij} - \Psi_{i-1,j} \right) \right] / 2/h_y^2 , \quad (4.4)$$

$$\Lambda_{yy} \Psi = \frac{2}{h_j(h_j + h_{j-1})} \Psi_{ij+1} - \frac{2}{h_j h_{j-1}} \Psi_{ij} + \frac{2}{h_{j+1}(h_j + h_{j-1})} \Psi_{ij-1} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + O(h_j). \quad (4.5)$$

Алгоритм решения задачи заключался в выполнении на каждом слое по фиктивному времени следующих трех счетных циклов: отыскания "завихренности"  $\omega$  при заданном профиле осредненной скорости  $U$ , определения в узлах сетки  $\Psi$  по найденным значениям  $\omega$  и, наконец, интегрирования уравнения для скорости  $U$ . Для решения уравнения (4.1) использовалась схема стабилизирующей поправки (см. Яненко, [10]):

$$\frac{\tilde{\omega} - \omega^n}{\tau} = \Lambda_{yy} \tilde{\omega} + \Lambda_{yy} \omega^n + F_\omega^n, \quad (4.6)$$

$$\frac{\omega^{n+1} - \tilde{\omega}}{\tau} = \Lambda_{yy} (\omega^{n+1} - \omega^n), \quad i = -M+1, \dots, M-1, \\ j = 1, \dots, N-1.$$

Здесь  $\tau$  — шаг по фиктивному времени, а

$$F_\omega^n = -Re \times \frac{2}{\pi} \times \left[ \cos\left(\frac{\pi x_j \times h_y}{2}\right) \right]^2 \times \left[ \frac{2}{h_{j+1} + h_{j-1}} \cdot \frac{\Psi_{i+1,j+1}^n + \Psi_{i-1,j-1}^n - \Psi_{i,j+1}^n - \Psi_{i,j-1}^n}{2 h_y} \right] \\ + \left( \frac{2 \cdot U_{j+1}^n}{(h_{yj} + h_{yj-1}) h_{yj}} - \frac{2 U_j^n}{h_{yj} h_{yj-1}} + \frac{2 U_{j-1}^n}{h_{yj-1} (h_{yj} + h_{yj-1})} \right) \cdot \frac{\Psi_{i+1,j}^n - \Psi_{i-1,j}^n}{2 h_y}. \quad (4.7)$$

На втором полушаге на оси канала имеем условие симметрии, которое аппроксимируется со вторым порядком по  $y$

$$\omega_{i,0}^{n+1} = \omega_{i,1}^{n+1}. \quad (4.8a)$$

На стенке  $j=N$  используется схема Тома, 1964 с релаксацией

$$\omega_{i,N}^{n+1} = -\frac{2 \Psi_{N-1}^n}{h_{y,N-1}^2} \cdot \frac{3}{2} h_{y,N-1} + \left(1 - \frac{3}{2} h_{y,N-1}\right) \omega_{i,N}^n. \quad (4.8b)$$

Численное интегрирование (4.2) осуществляется посредством итерационной схемы стабилизирующей поправки, причем выбор оптимального итерационного параметра проводится на основе анализа численных экспериментов. Реализация граничных условий для  $\Psi$  (см. рис. 2) не вызывает затруднений.

Критерий установления решения (4.2) выбирается в виде

$$\max_{ij} \|\psi_{ij}^{n+1S+1} - \psi_{ij}^{n+1S}\| / \max_{ij} \|\psi_{ij}^{n+1S}\| \leq 0.01, \quad (4.9)$$

где  $S$  — номер итерации.

Имея значение  $\psi^{n+1} = \psi^{n+1S+1}$ , скорость  $U^{n+1}$  определялась из (3.18) по следующей схеме:

$$\frac{U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1}}{h_{yj}} = -\frac{1}{2}(y_j + y_{j+1}) - \sum_{i=1}^N \frac{\psi_{ij}^{n+1} - \psi_{ij}^{n+1}}{h_{yj}} \cdot \frac{\psi_{i+1,j+1}^{n+1} - \psi_{i-1,j+1}^{n+1} + \psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i-1,j}^{n+1}}{4h_y}. \quad (4.10)$$

Сумма в правой части означает, что интеграл аппроксимируется по формуле трапеций. (4.10) обеспечивает второй порядок аппроксимации по переменной  $y$ . Внешнее итерирование начинается с ламинарного профиля

$$U^0 = \frac{Re}{2} (1 - \gamma^2), \quad \psi^0 = \frac{10 \cdot (1 - \gamma^2)}{(1 + Re \cdot \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}\gamma))^4}, \quad \omega^0 = -\Delta \psi^0, \quad (4.11)$$

и продолжается до такого  $N$ , для которого

$$\max_j \|U_j^{n+1} - U_j^n\| / \max_j \|U_j^n\| \leq 0.0001.$$

Принимается, что решение поставленной задачи есть  $U = U^{n+1}$ ,  $\psi = \psi^{n+1}$  и вычисляются соответствующие механические характеристики. Для контроля точности алгоритма вариант  $Re = 100$  был посчитан на последовательности сеток  $(\tau, h_y, h_y)$ ,  $(\tau, h_y/2, h_y/2)$ . При этом

$$\max_j \|U_h - U_{h/2}\| / \max_j \|U_h\| = 0.061.$$

Тот же случай на последовательности сеток  $(\tau, h_y, h_y)$ ,  $(\tau, h_y, h_y/2)$  дает

$$\max_j \|U_{h_y} - U_{h_y/2}\| / \max_j \|U_{h_y}\| = 0.013.$$

## РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Поскольку принцип наименьшей диссипации управляет переходом к турбулентности, то на этот аспект проблемы мы и обратили внимание в первую очередь. С этой целью было сконструировано начальное условие (4.11), в котором константа используется дляварьирования амплитуды начального возмущения. Так  $A \approx 0$  при-

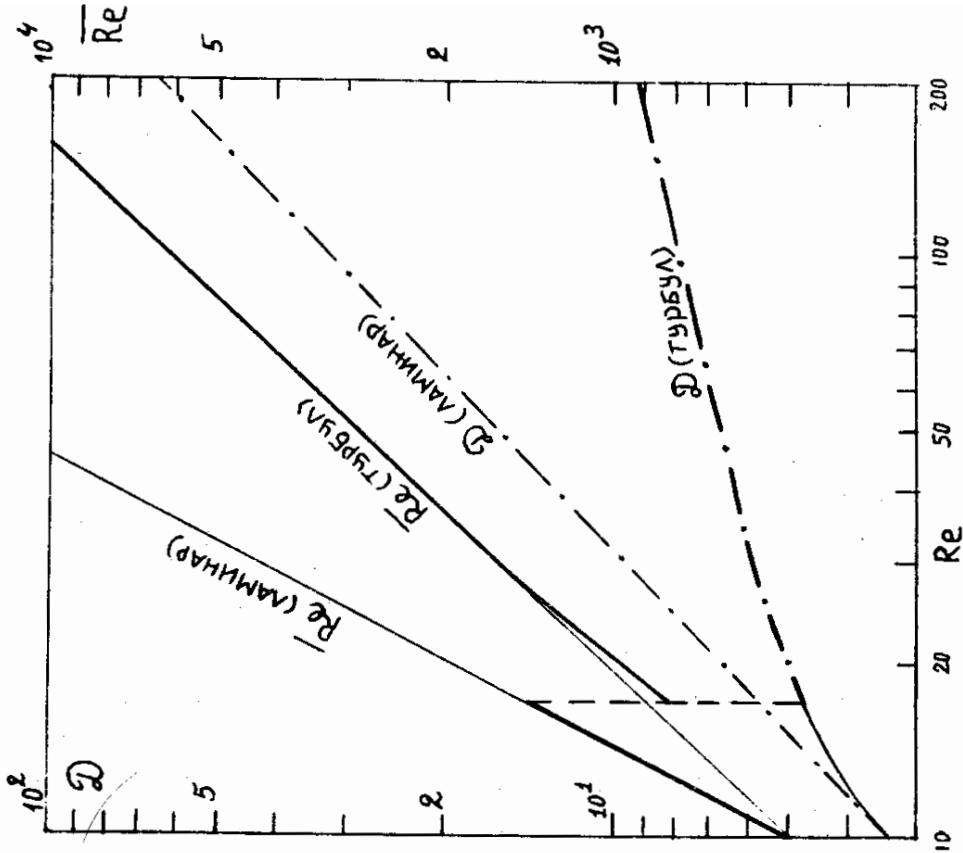


Рис.3 Число Рейнольдса  $\overline{Re}$  по средней скорости и полная диссипация  $\mathcal{D}$  в полуканале как функция  $Re$ .

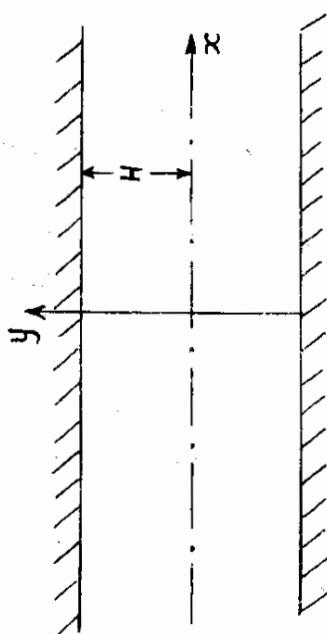


Рис.1 Геометрия течения.

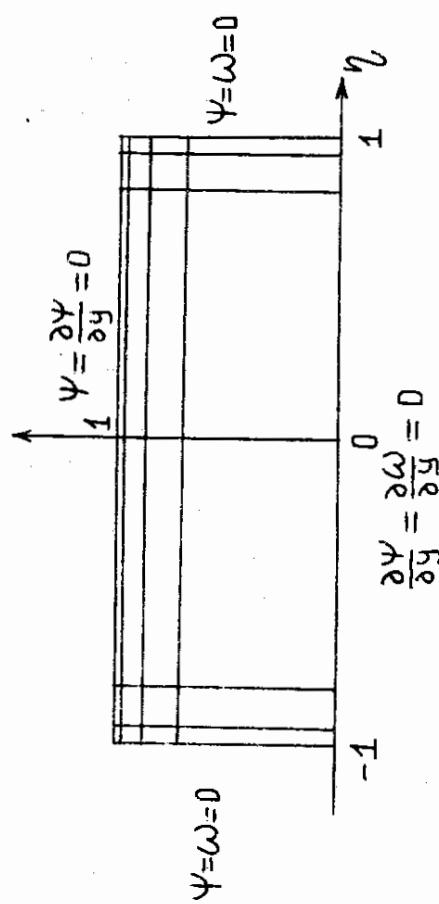
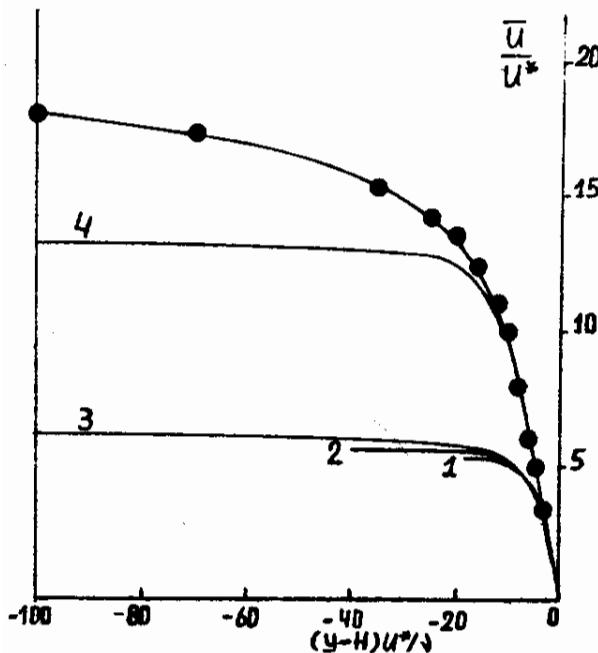


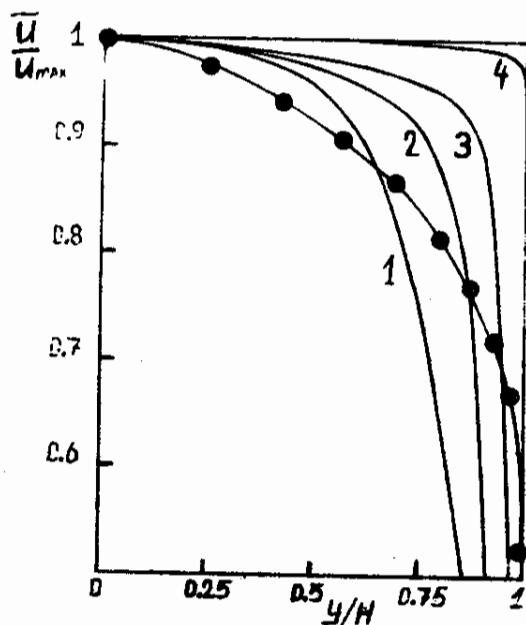
Рис.2 Расчетная область.

ближенно соответствует возмущениям с конечной амплитудой, в то время как  $A = 15$  представляет из себя практический порог бесконечно малых возмущений. Вычисления обнаружили два различных критических числа Рейнольдса: нижнее и верхнее. Нижним критическим числом называется такое значение числа Рейнольдса, для которого возмущения даже с бесконечной амплитудой затухают. В нашем случае это число оказалось примерно равным 10. В пересчете на число Рейнольдса по максимальной скорости  $Re^0$  это соответствует 100, что хорошо согласуется с результатами Оппа [3]  $Re^0 = 117$ . Этот факт указывает на склонность вариационных принципов давать заниженную оценку критических чисел. В связи с этим в настоящей работе утверждается, что даже если минимум находится в классе случайных функций, вышеуказанное свойство сохраняется. Экспериментальное значение нижнего критического числа  $Re \approx 38,3$ . На другом конце интервала изменения  $A$  происходит ситуация, когда даже при  $A \geq 15$  нетривиальное решение имеет место. Оказывается, что для  $Re \geq 17$  нетривиальное решение развивается при всех значениях  $A$  из указанного интервала. Поэтому  $Re = 17$  мы назовем верхним критическим числом. Между этими двумя числами лежит область, в которой нетривиальное решение развивается только для достаточно большой амплитуды начального возмущения. Например, если  $Re = 15$ , нетривиальное решение имеет место когда  $A \leq 3$ , в то время как для  $A > 3$  существует лишь тривиальное решение.

Поскольку минимизируется диссипация, интересно сравнить полную скорость диссипации ламинарного течения с соответствующей характеристикой стохастического течения. Сравнение дано на рис. 3, где приводятся диссипация  $\mathcal{D}$  и число Рейнольдса по средней скорости  $Re$  как функции  $Re$ . Видно, что диссипация стохастического течения становится меньше ламинарной для  $Re \approx 10$ , которое совпадает с нижним критическим числом  $Re$ . Другими словами, стохастический режим диссирирует меньше чем ламинарный с самого своего появления. Становится ясно, что стохастическое решение имеет право на существование и его появление согласуется с принципом диссипации, т.е. этот принцип способен предсказывать разрушение ламинарного течения между двумя пластинами и явление перехода. Однако, принцип наименьшей диссипации в некотором приближении может быть использован для предсказывания турбулентного течения в области умеренно закритических чисел  $Re$ . Последнее

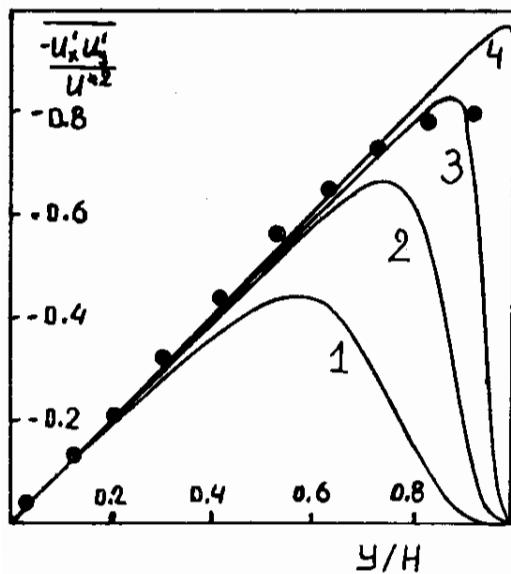


а) пограничный слой.

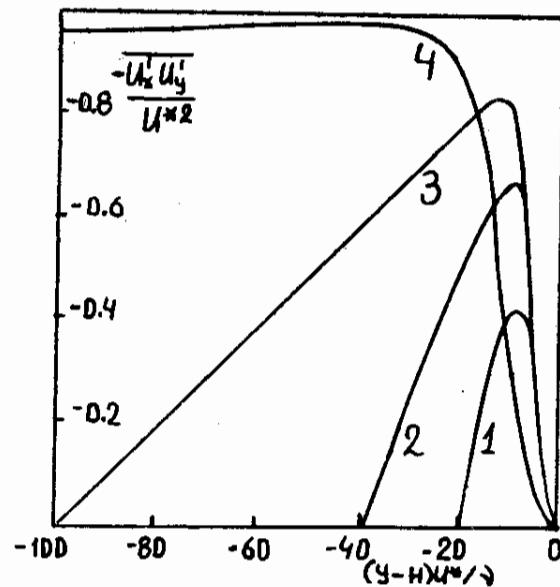


б) ядро течения.

Рис.4 Развитие осредненной скотости с числом Рейнольдса  
I. -  $Re = 20$ ; 2. -  $Re = 40$ ; 3. -  $Re = 100$ ; 4. -  $Re = 2340$ ;  
● - эксперименты Конт-Белло при  $Re = 2340$ .

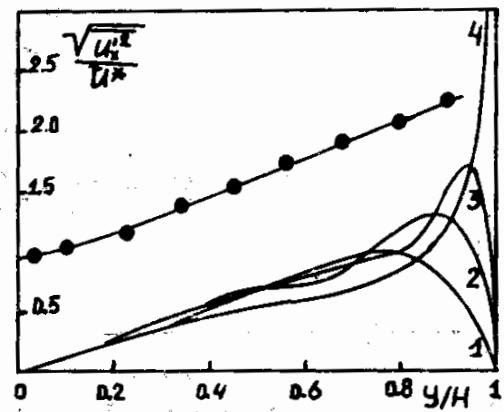
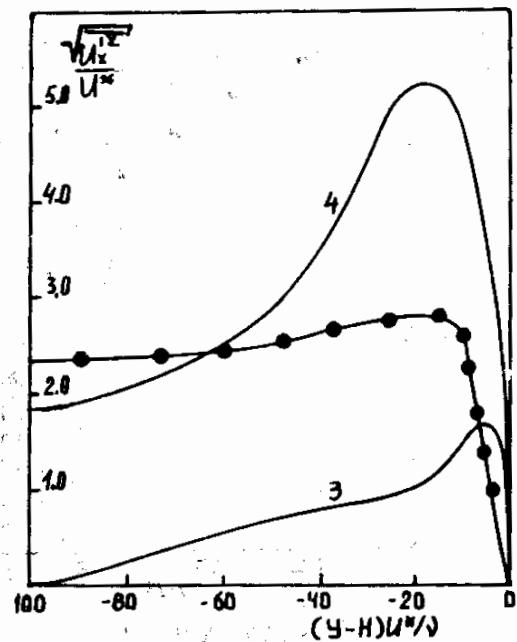


а) ядро течения.



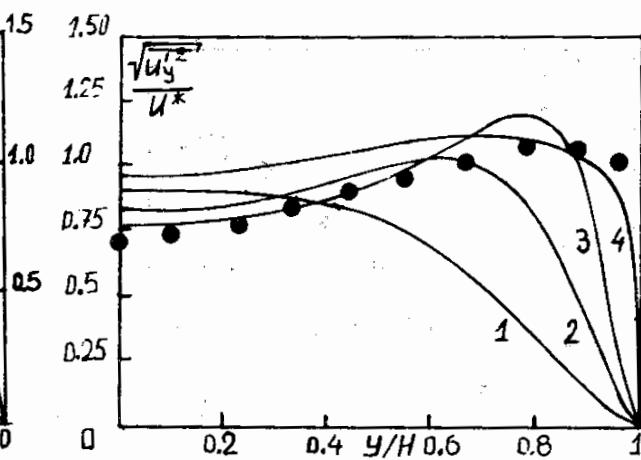
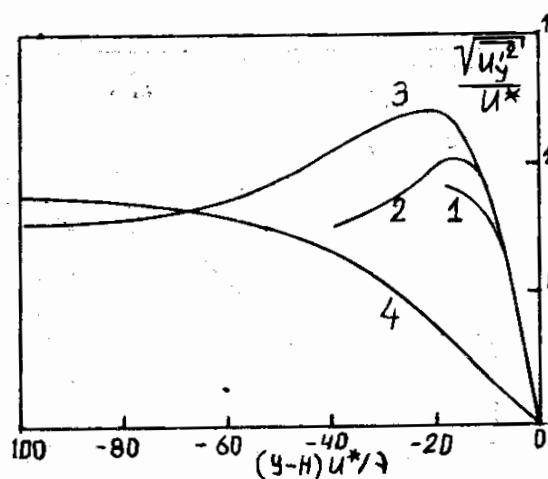
б) пограничный слой.

Рис.5 Рейнольдсовое напряжение (обозначения как на рис.4).



а) пограничный слой.

Рис.6 Интенсивность пульсаций  $\sqrt{\frac{U_x'^2}{U^*^2}}$  (обозначения как на рис.4).



а) пограничный слой.

Рис.7 Интенсивность пульсаций  $\sqrt{\frac{U_y'^2}{U^*^2}}$  (обозначения как на рис.4).

ограничение является следствием того, что представление (2.1) работает только для разреженных систем структур. Поэтому, полученные здесь результаты будут сопоставляться лишь качественно, тем более, что двумерное турбулентное течение не реализуется в действительности.

Важной характеристикой является профиль осредненной скорости стохастического течения, который изображен на рис. 4 вместе с экспериментальными данными Конт-Белло [11]. Интересно отметить, что рассчитанный профиль скорости оказался более заполненным, чем реальный турбулентный профиль, к тому же максимальное значение скорости заметно ниже экспериментального. Несмотря на это, сравнение можно признать хорошим в качественном смысле, поскольку методика не содержит "подгоняющих" параметров. На рис. 5 показана эволюция турбулентного напряжения с числом  $Re$ . Хорошо видно, что здесь даже количественное совпадение оказывается очень хорошим.

На рис. 6 и 7 изображены турбулентные характеристики. В то время как  $\sqrt{U_y'^2}$  находится тоже в хорошем количественном согласии с экспериментом, "компоненты энергии"  $\sqrt{U_x'^2}$  далека от измеряемой в ядре течения. Это не должно удивлять, если учесть, что в нашей идеализированной двумерной ситуации имеет место лишь симметричное по  $y$  решение для функции тока, что приводит к нулевому значению этой "компоненты" на оси. Вероятно, что в трехмерных ситуациях симметричные и антисимметричные решения появляются вместе, что обеспечивает ненулевое значение обеих компонент энергии на оси канала.

Существенными характеристиками турбулентности являются корреляционные функции

$$R_{xx}(\tau) = \overline{U'_x(x) U'_x(x+\tau)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Psi(\xi, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Psi(\xi+x, y)}{\partial y} d\xi,$$

$$R_{yy}(\tau) = \overline{U'_y(x) U'_y(x+\tau)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Psi(\xi, y)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \Psi(\xi+x, y)}{\partial \xi} d\xi.$$

Корреляции с различными  $y$  не привлекают внимания, поскольку принято, что стохастичность связана только с координатой  $x$  (смотри (2.1)).

На рис. 8 и 9 изображены коэффициенты корреляции

$$K_{11} = R_{xx}(\tau)/R_{xx}(0), \quad (5.1)$$

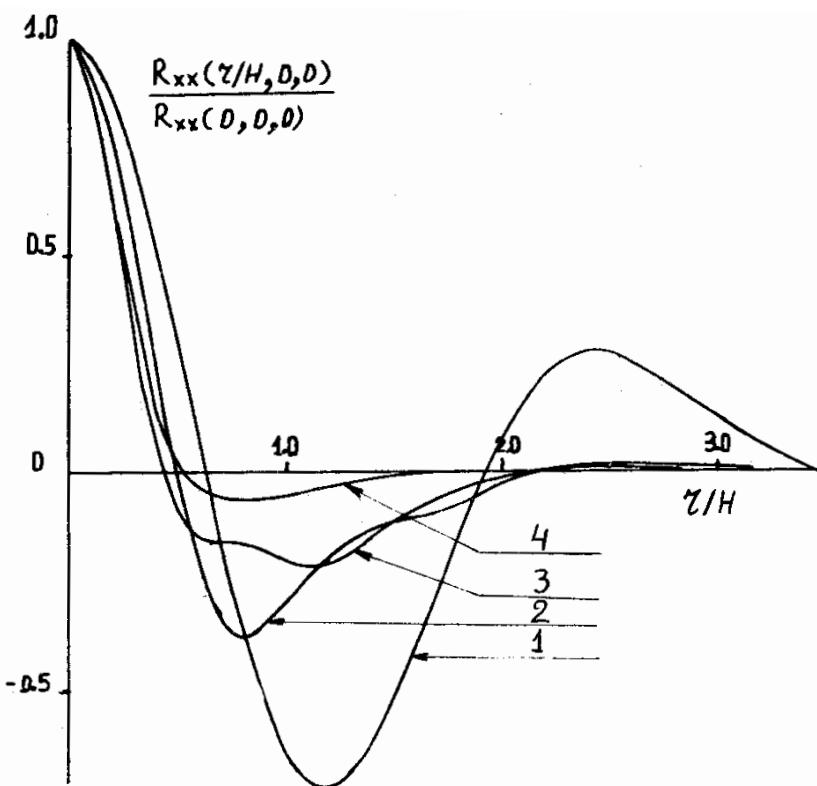


Рис.8 Двойная пространственная корреляция при  $\Upsilon = 0.55$   
(обозначения как на рис.4).

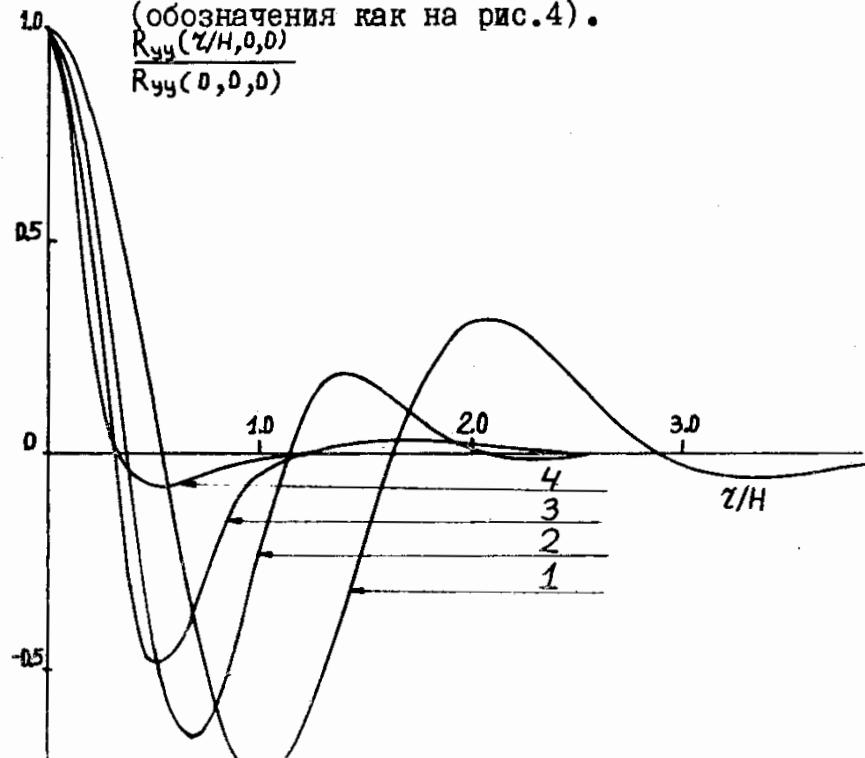


Рис.9 Поперечная пространственная корреляция  $K_{xy}$  при  $\Upsilon = 0.55$  (обозначения как на рис.4).

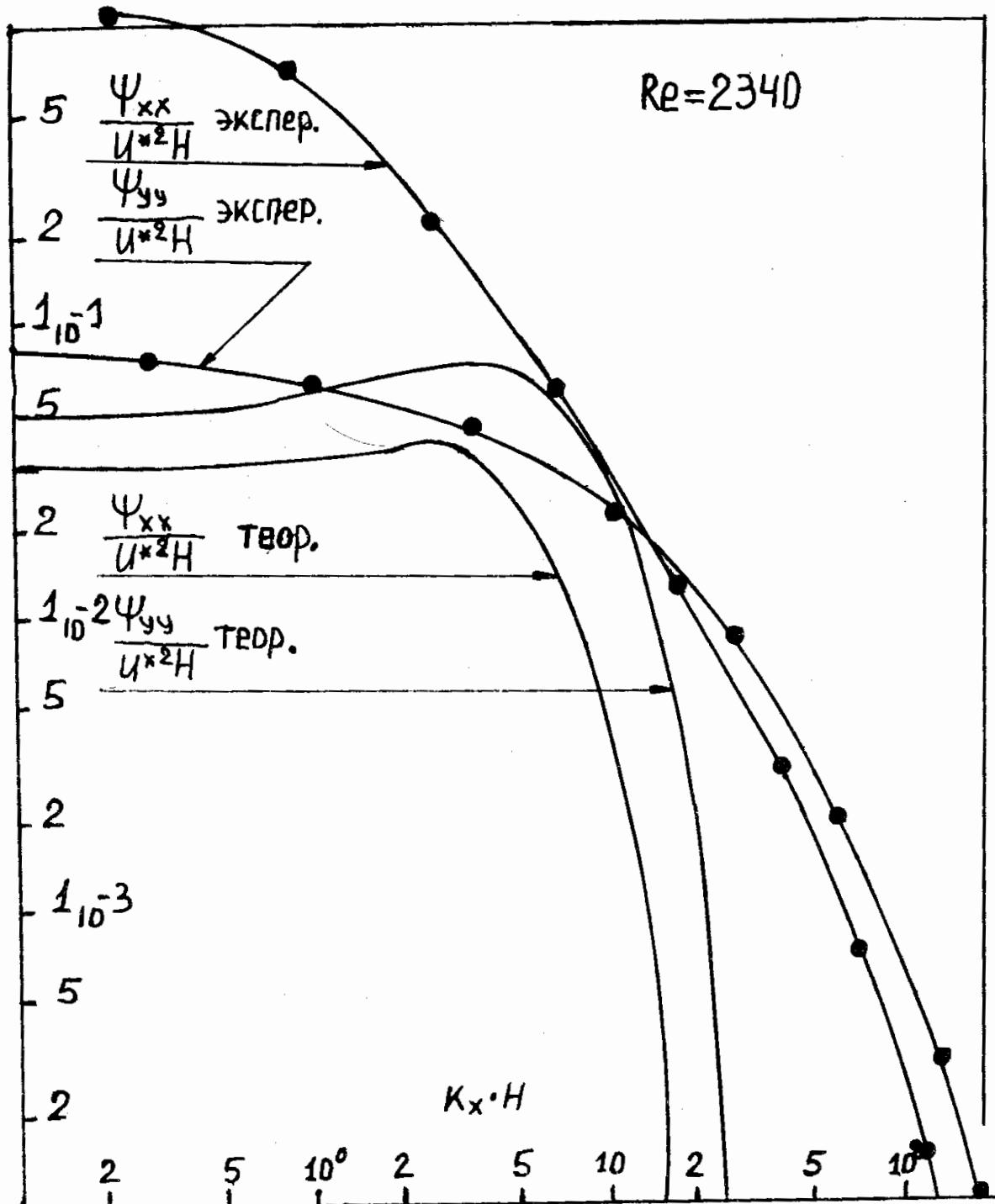


Рис.10 Спектры  $\Psi_{xx}$  и  $\Psi_{yy}$  при  $Re = 2340$  и  $y = 0.55$   
 ● - экспериментальные данные Конт-Белло для  $Re = 2340$   
 $(Re = 57000)$ .

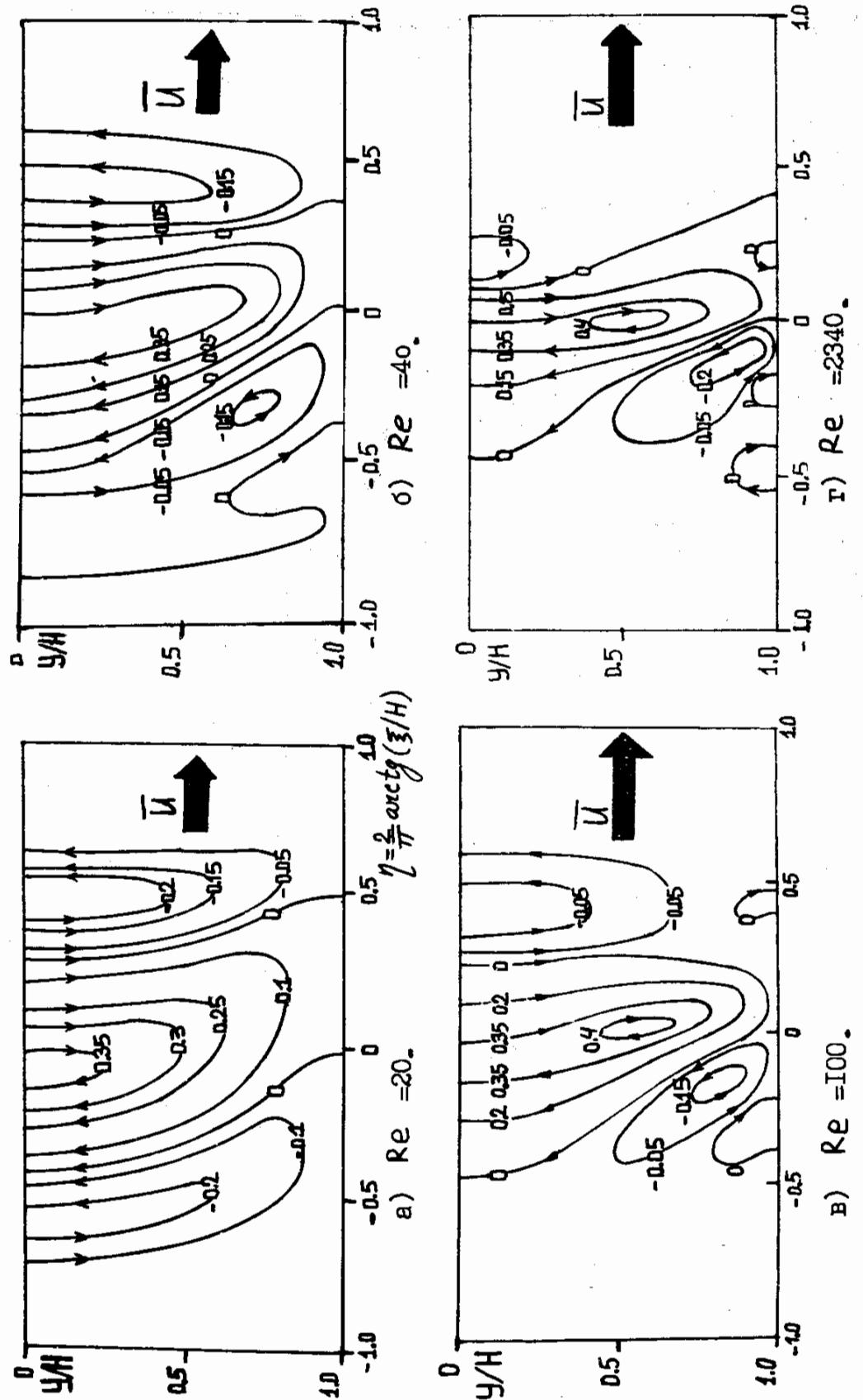


Рис. II Изолинии функции  $\Psi \times [\sqrt{\frac{2}{U^*}}]^{-1}$

$$K_{22} = R_{yy}(z) / R_{yy}(0). \quad (5.2)$$

при значении  $U = 0,55$ , относящемуся к ядру течения. Наблюдается хорошее совпадение корреляции  $K_{11}$  с экспериментом для небольших  $z$  (к сожалению, у Конт-Белло приведены данные для  $Re = 120000$ ). Разница для больших  $z$  может быть объяснена двумерным характером стохастического течения. Действительно, поперечные корреляции у Конт-Белло напоминают подсчитанные здесь продольные корреляции (5.1) и (5.2). Возможно, за счет отсутствия третьего измерения немонотонный характер поперечных корреляций переносится на продольные. На основе корреляционных коэффициентов подсчитаны одномерные спектры  $\Psi_{xx}$  и  $\Psi_{yy}$ . Они удовлетворительно описывают эксперимент в энергосодержащей области, но затухают быстрее в области больших волновых чисел (см. рис. I0). Последнее означает, что нелинейности настоящей задачи, которая слабее, чем в уравнениях Навье-Стокса, не хватает для интенсивного переноса энергии по спектру. Отличие для малых волновых чисел может иметь причиной двумерность и конечность когерентных структур, которые составляют (2.1). Некоторое улучшение могло быть, если структуры имели бы разные масштабы. Однако, реализация такой обобщенной модели затруднительна.

Наконец отметим, что функции  $K_x$  и  $K_y$  интерпретируются как компоненты скорости одиночного выброса (когерентной структуры), т.е.  $\Psi$  есть не что иное как функция тока одиночного большого вихря. Форма выброса приведена на рис. II для различных чисел  $Re$ . Она похожа на форму структур, выявленных в работе [12] для пограничного слоя на плоской пластине.

1. Reynolds, O., On the dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion, Phil. Trans. Roy. Soc. London, 186A (1896) pp. 123-164.
2. ORR, W., McF., The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid, Part II: a viscous liquid., Proc. Roy. Irish Acad., 27 (1907) pp.69.
3. SOMMERFELD, A., Ein beitrag zur hydrodynamischen erklaerung der turbulenten fluessigkeitsbewegungen, Atti del IV Congr. intrnat. dei matematici (Roma 6-11.IV.1908), vol.III, 116-124.
4. Christov, C., Critical discussion on the stability of the plane and circular Poiseulle flows, Bulg. Acad. of Sci., Theor. and Applied Mech., 13, №1 (1982) pp.59-64.
5. MALKUS, W.V.R., Outline of a theory of turbulent shear flow, J. of Fluid Mech., 1, №3 (1956) pp. 521-539.
6. ГОЛЬДШТИК М.А. Принцип максимальной устойчивости осредненных турбулентных течений. Докл. АН СССР, т.182, № 5, 1968 с. 1026-1028.
7. Христов Х.И. Принцип наименьшей скорости диссипации энергии и возможность его применения к турбулентному течению в плоском канале. Докл. АН СССР, т.245, № 5, 1979 с. 1071-1075.
8. ВИНЕР Н. Нелинейные задачи в теории случайных процессов, ИЛ, М., 1961.
9. БУРОВ А.Н. Численное исследование турбулентных течений с малыми добавками полимеров в плоском канале. В сб.: Численные методы механики сплошной среды . Новосибирск, 1982, т.13, № 6, с. 14-24.
10. ЯНЕНКО Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, АН СССР - СО, 'Наука'-СО, Новосибирск, 1967.
11. КОНТ-БЕЛЛО Ж. Турбулентное течение в канале с параллельными стенками, Мир , Москва, 1968.
12. Zilberman, M., Wygnanski, I. and Kaplan, R.E., Phys. Fluids, 20, №10, part II (1977), S258.