

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Книга 2 — Механика

Том 81, 1987

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI“

FACULTE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Livre 2 — Mécanique

Tome 81, 1987

МОДЕЛИРОВАНИЕ КРУПНОМАСШТАБНЫХ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР В СВОБОДНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СТРУЕ

ВАЛЕРИЙ НАРТОВ, ХРИСТО И. ХРИСТОВ

Валерий Нартов, Христо И. Христов. МОДЕЛИРОВАНИЕ КРУПНО-
МАСШТАБНЫХ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР В СВОБОДНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧ-
НОЙ СТРУЕ

Развитый ранее в работах авторов метод аппроксимации точечной случайной функцией применяется для моделирования крупномасштабной турбулентности на начальном участке осесимметричной струи. Выписываются замкнутые уравнения для осредненной скорости для ядра Винеровского интеграла, моделирующего пульсацию. Численно находится локализованное решение, которое интерпретируется как форма единичной когерентной структуры. На основе точечного случайного решения рассчитаны турбулентные характеристики струи (вторые, третьи и четвертые кумулянты) на начальном участке и сравнены с результатами разных экспериментальных работ. Хорошее качественное или количественное совпадение показывает, что и для осесимметричной струи точечная случайная аппроксимация охватывает основную информацию с турбулентном течении.

Valery Nartov, Christo I. Christov. MODELING THE LARGE EDDIES IN AN
AXISYMMETRIC FREE JET

The earlier developed by the authors method of random point approximation is applied for modeling the large-scale turbulence in the inlet region of an axisymmetric jet. A closed system of equations is derived for the mean-profile velocity and for the kernel of Wiener integral representing the pulsation. A localized solution is obtained numerically and interpreted as the shape of a single large eddy. On the base of the random point solution the characteristics of turbulence (e. g., second, third and fourth cumulants) are calculated and compared to the experimental observations

of different authors. The good quantitative or qualitative comparison means that the random point approximation contains the essential part of the information about the flow.

1. ФИЗИЧЕСКАЯ КАРТИНА ТЕЧЕНИЯ

Течение в свободной осесимметричной турбулентной струи можно условно разделить на три участка (рис. 1). Это начальный участок с „потенциальным“ ядром в центральной части, где средняя скорость постоянна и равна U_0 ; основной или автомодельный участок и переходной участок, в котором скорость на оси начинает убывать, а профили скорости постепенно становятся аффинными. Длина начального участка, например, равна $4D-5D$ (D — диаметр отверстия), а основной участок начинается с $x = 10D$. Следует заметить, что настоящая автомодельность как средних, так и пульсационных характеристик наступает при $x/D > 50$.

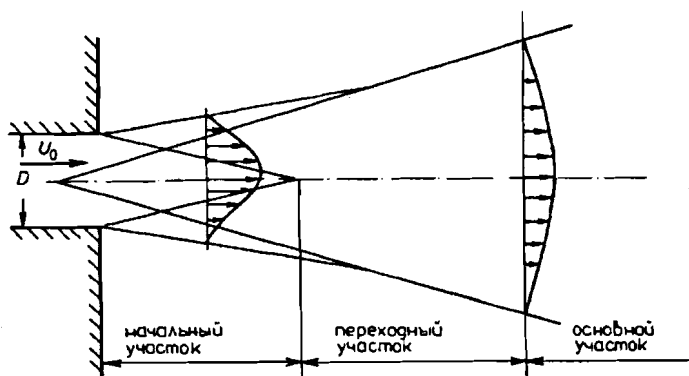


Рис. 1. Геометрия свободной турбулентной осесимметричной струи

Большинство теоретических и экспериментальных работ посвящено изучению основного участка (см. [1, 2] и другие). Начальный участок исследован не так подробно из-за его сложности и трудностей в теоретическом описании. Экспериментальная информация о нем сводится примерно к следующему.

В отличие от средней скорости, интенсивность продольных пульсаций скорости постоянна до $x/D = 1 \text{ div } 1,5$, после чего возрастает и при $x/D \approx 9$ достигает максимального значения. Далее интенсивность убывает. Аналогично ведут себя интенсивности других компонент пульсационной скорости [3, 4, 5].

В начальной области интенсивности имеют „двугорбые“ профили, которые сглаживаются при переходе к основному участку. В экспериментальной работе [6] основные характеристики турбулентности представлены в автомодельном виде с использованием переменной $(r - r_m)/\delta$, ($U(r_m) = U_0/2$, где δ — толщина вытеснения). Использование этого факта для теоретического описания затруднительно, так как изменение r_m с ростом x имеет довольно сложный характер.

Высокая степень турбулентности на выходе отверстия приводит к возникновению режима, соответствующего основному участку [1, 4, 5, 7]. Создание такого режима считается гарантией подавления в течении тороидальных крупномасштабных структур [8]. При меньшей начальной интенсивности такие структуры существуют и движутся со скоростью $0,65 U_0$ [9]. Их присутствие обуславливает наличие пика в низкочастотной части спектра энергии, который содержит значительную часть энергии турбулентности [4, 5, 10].

В работе [11] предложена элементарная модель структур и проведены их корреляционные измерения. Получается, что тороидальные вихри располагаются на расстоянии $1,3D$ друг от друга и движутся со скоростью $0,65U_0$. Такое представление подтверждается данными [12], где определен временной размер структуры, а на основе гипотезы Тейлора получен и пространственный размер $\Delta x = 0,65U_0\Delta t = 1,2D - 1,3D$. Максимум полной завихренности на структуре, примерно, равен $(0,55\text{div } 0,75)U_0/R$.

Напряжение Рейнольдса мелкомасштабных пульсаций достигает значения „когерентного“ напряжения на расстоянии $x/D \approx 3,5\text{div } 4$ [13]. В отличие от плоского слоя смешения „когерентное“ напряжение Рейнольдса формируется, в основном, на высокоскоростном участке [12].

Упорядоченные структуры обнаружены и на основном участке струи, но они не тороидальны, так как имеют азимутальную протяженность 90° [14]. Этот вывод подтверждают и корреляционные измерения [15].

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Кроме вышеупомянутой работы [11], элементарная расчетная схема определения геометрических параметров структур и размера начального участка предложена в [16]. Теоретическое описание крупномасштабных структур на основном участке отсутствует.

В [17, 18] предложено аппроксимировать случайные решения нелинейных систем точечными случайными функциями и разработана техника приложения применительно к стохастическому решению уравнения Бюргера. Получено хорошее количественное согласие с результатами прямого численного эксперимента. Аналогичные результаты получены в [19] для уравнения Курамото-Сивашинского. Впервые аппроксимация точечной функцией применялась к реальному турбулентному течению в работах авторов [20, 21, 22], где на основе принципа минимальной диссипации [23] исследовался стохастический режим в течениях Пуазейля когда случайные функции однородны по отношению к продольной пространственной координате. Медленное изменение в продольном направлении было учтено в [24, 25, 26, 27] применительно к плоскому слою смешения, где уже разыскивалось стохастическое решение уравнений Навье-Стокса в автономных переменных. Во всех упомянутых работах получено хорошее количественное согласие с экспериментом для усредненных характеристик и для многоточечных кумулянтов с умеренными различиями в аргументах. Предсказывание многоточечных статистических характеристик является принципиальным шагом вперед в сравнении с полуэмпирическими теориями.

И так, уравнение Рейнольдса в приближении пограничного слоя име-

ет вид

$$(1) \quad \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} r \bar{\psi} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \overline{v' \omega'}$$

где u и v — продольная и радиальная компоненты скорости,

$$(2) \quad u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \psi, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \omega = -\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Соответствующее уравнение для пульсационной завихренности записывается следующим образом:

$$(3) \quad \frac{\partial \omega'}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} r (\bar{\psi} + \bar{\psi}') \right] \frac{\partial \omega'}{\partial x} - \frac{\partial \psi'}{\partial x} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\bar{\omega} + \omega'}{r} \right) = \nu \left[\frac{\partial^2 \omega'}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \omega' \right],$$

где

$$(4) \quad -\omega' = \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \psi' + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2}.$$

Следует заметить, что уравнение (3) также получено в приближении пограничного слоя. Перейдем к независимым переменным η , ξ , τ , x с помощью представления

$$(5) \quad \bar{\psi} = U_0 x F(\eta), \quad \psi' = U_0 x_0 Q(\eta, \xi, \tau),$$

$$(6) \quad \eta = (r - R)/x_0, \quad \xi = (x - ct)/x_0, \quad \tau = tU_0/x_0.$$

Здесь $c = dx_0/dt$ — скорость движения локальной координатной системы в направлении течения, которая будет определяться в процессе решения задачи. Тогда

$$(7) \quad \bar{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{\psi}) = U_0 \left[\frac{x}{r} F + F' \right] = U_0 \left[\frac{F}{\eta + \frac{R}{x}} + F' \right],$$

$$(8) \quad \bar{v} = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} = U_0 [-F + F' \eta],$$

$$(9) \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{U_0}{x} \left[\frac{F}{\eta + \frac{R}{x}} - \eta \left(\frac{F}{\eta + \frac{R}{x}} + F' \right) \right]',$$

$$(10) \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = \frac{U_0}{x} \left[\frac{F}{\eta + \frac{R}{x}} + F' \right]',$$

$$(11) \quad r \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = U_0 \left(\eta + \frac{R}{x} \right) \left[\frac{F}{\eta + \frac{R}{x}} + F' \right]',$$

$$(12) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = \frac{U_0}{\eta + \frac{R}{x}} \frac{1}{x^2} \left[\left(\eta + \frac{R}{x} \right) \left(\frac{F}{\eta + \frac{R}{x}} + F' \right) \right]'$$

Подставим (7)–(12) в уравнение (1). Тогда без учета „турбулентного“ члена получим уравнение для ламинарного режима течения

$$(13) \quad \frac{U_0^2 F}{x \left(\eta + \frac{R}{x} \right)} \left\{ - \left(\frac{F}{\eta + \frac{R}{x}} + F' \right)' \left(2\eta + \frac{R}{x} \right) + \left(\frac{F}{\eta + \frac{R}{x}} + F' \right) \right\} \\ = \frac{\nu U_0}{x^2 \left(\eta + \frac{R}{x} \right)} \left[\left(\eta + \frac{R}{x} \right) \left(\frac{F}{\eta + \frac{R}{x}} + F' \right) \right]'$$

Преобразуем далее, обозначив

$$(14) \quad u = \frac{\bar{u}}{U_0} = \frac{F'}{\eta + \frac{R}{x}} + F'$$

Тогда

$$(15) \quad F \left[-u' \left(2\eta + \frac{R}{x} \right) + u \right] = \frac{\nu}{U_0 x} \left[\left(\eta + \frac{R}{x} \right) u' \right]'$$

Удобно ввести переменную $\eta^* = \frac{r}{x} = \eta + \frac{R}{x}$. Очевидно, что $\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta^*}$, поскольку η и x независимые переменные.

$$(16) \quad Fu - F \frac{du}{d\eta^*} \left(2\eta^* - \frac{R}{x} \right) = \frac{\nu}{U_0 x} \frac{d}{d\eta^*} \eta^* \frac{du}{d\eta^*}$$

Обозначим

$$(17) \quad Re\epsilon = \frac{U_0 R}{\nu}, \quad A = \frac{R}{x}$$

Тогда (16) и (17) записываются в виде

$$(18) \quad Fu - F \frac{du}{d\eta^*} (2\eta^* - A) = \frac{A}{Re} \frac{d}{d\eta^*} \eta^* \frac{du}{d\eta^*},$$

$$(19) \quad u = \frac{1}{\eta^*} \frac{d}{d\eta^*} \eta^* F.$$

Граничные условия для этих уравнений такие же, как в плоском слое смешения [26, 27, 30]

$$(20) \quad u(0) = 1, \quad u(\infty) = 0, \quad F(A) = 0.$$

Обратимся теперь к уравнениям (3), (4). Для пульсационных характеристик предполагается медленное изменение структуры в продольном направлении [24, 25, 26, 27]. Это означает, что производными от (5), (6) по x_0 будем пренебрегать, кроме в тех случаях, когда производится дифференцирование по времени (нужно отметить, что $x_0 = x_0(t)$). Можно показать, что пульсационные члены, входящие в (3), (4) имеют вид

$$(21) \quad u' = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \psi' = U_0 \frac{1}{\eta^*} \frac{\partial}{\partial \eta^*} \eta^* Q,$$

$$(22) \quad v' = \frac{\partial \psi'}{\partial x} = U_0 \frac{\partial Q}{\partial \xi},$$

$$(23) \quad \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} = \frac{U_0}{x_0} \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2},$$

$$(24) \quad \frac{\partial u'}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \psi' = \frac{U_0}{x_0} \frac{\partial}{\partial \eta^*} \frac{1}{\eta^*} \frac{\partial}{\partial \eta^*} \eta^* Q,$$

$$(25) \quad \omega' = -\frac{U_0}{x_0} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \eta^*} \frac{1}{\eta^*} \frac{\partial}{\partial \eta^*} \eta^* Q \right),$$

$$(26) \quad \frac{\partial \omega'}{\partial x} = -\frac{U_0}{x_0^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \eta^*} \frac{1}{\eta^*} \frac{\partial}{\partial \eta^*} \eta^* Q \right),$$

$$(27) \quad \frac{\partial^2 \omega'}{\partial x^2} = -\frac{U_0}{x_0^3} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \eta^*} \frac{1}{\eta^*} \frac{\partial}{\partial \eta^*} \eta^* Q \right),$$

$$(28) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\omega'}{r} \right) = -\frac{U_0}{x_0^3} \frac{\partial}{\partial \eta^*} \frac{1}{\eta^*} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \eta^*} \frac{1}{\eta^*} \frac{\partial}{\partial \eta^*} \eta^* Q \right),$$

$$(29) \quad r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\omega'}{r} \right) = -\frac{U_0}{x_0^3} \eta^* \frac{\partial}{\partial \eta^*} \frac{1}{\eta^*} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \eta^*} \frac{1}{\eta^*} \frac{\partial}{\partial \eta^*} \eta^* Q \right),$$

$$(30) \quad \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial r \omega'}{\partial r} = -\frac{U_0}{x_0^3} \frac{\partial}{\partial \eta^*} \frac{1}{\eta^*} \frac{\partial}{\partial \eta^*} \eta^* \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \eta^*} \frac{1}{\eta^*} \frac{\partial}{\partial \eta^*} \eta^* Q \right).$$

Остается еще выражение средней завихренности

$$(31) \quad r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\bar{\omega}}{r} \right) = -r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) = -\frac{U_0}{x_0^2} \left(\eta^* \frac{d}{d\eta^*} \frac{1}{\eta^*} \frac{d}{d\eta^*} \frac{1}{\eta^*} \frac{d}{d\eta^*} \eta^* F \right).$$

Обозначим

$$(32) \quad \omega = \frac{\omega' x_0}{U_0} = -\frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2} - \frac{\partial}{\partial \eta^*} \frac{1}{\eta^*} \frac{\partial}{\partial \eta^*} \eta^* Q.$$

Тогда, с учетом того, что $c \equiv \frac{dx_0}{dt}$, имеем

$$(33) \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{U_0}{x_0} \omega(\xi, \eta, \tau) \right) = \frac{\partial \omega}{\partial \tau} \frac{U_0^2}{x_0^2} - \frac{U_0}{x_0^2} \frac{dx_0}{dt} \left(\omega + \xi \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right).$$

Обозначив

$$(34) \quad c_0 = \frac{dx_0}{dt} \cdot \frac{1}{U_0},$$

получаем

$$(35) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \omega'}{\partial t} &= \frac{U_0^2}{x_0^2} \left[\frac{\partial \omega}{\partial \tau} - c_0 \left(\omega + \xi \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right) \right] \\ &= \frac{U_0^2}{x_0^2} \left[\frac{\partial \omega}{\partial \tau} - c_0 \left(\omega + \xi \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + (\eta^* - A) \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right) \right]. \end{aligned}$$

Подставим (21)–(31), (36) в (3)–(4) с учетом обозначений (32), (19) и

$$(36) \quad \Omega = -\frac{du}{d\eta^*}, \quad u = \frac{1}{\eta^*} \frac{d}{d\eta^*} \eta^* F.$$

Имеем:

$$(37) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \left(u + \frac{1}{\eta^*} \frac{d}{d\eta^*} \eta^* Q - c_0 - c_0 \xi \right) \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial Q}{\partial \xi} + c_0 \eta \right) \frac{\partial \omega}{\partial \eta^*} \\ + \frac{\partial Q}{\partial \xi} \left(\frac{\omega + \Omega}{\eta^*} - \frac{d\Omega}{d\eta^*} \right) - c_0 \omega = \frac{A}{Re} \left[\Delta \omega + \frac{\partial}{\partial \eta^*} \left(\frac{\omega}{\eta^*} \right) \right], \end{aligned}$$

$$(38) \quad -\omega = \Delta Q + \frac{\partial}{\partial \eta^*} \frac{Q}{\eta^*}.$$

Поскольку член $\overline{v'v'\omega'}$ в правой части уравнения (1) равен $\frac{U_0^2}{x_0^2} \frac{\partial Q}{\partial \xi} \omega$, то, с учетом турбулентного члена, (18) имеет вид

$$(39) \quad Fu - F \frac{du}{d\eta^*} (2\eta^* - A) = \frac{A}{Re} \frac{d}{d\eta^*} \eta^* \frac{du}{d\eta^*} + \frac{\partial Q}{\partial \xi} \omega.$$

Так как неоднородность уже учтена введением автомодельных координат, для Q ищем решение в виде однородного случайного потока [17, 18, 20, 26, 27]:

$$(40) \quad Q(\xi, \eta, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi - \zeta, \eta, \tau) C_f^{(1)}(\zeta) d\zeta,$$

где K — неслучайная функция, которая будет определяться, а $C_f^{(1)}(\zeta)$ есть полином Шарлье первого порядка от пуассоновской случайной функции

$$(41) \quad f(x) = \sum_{-\infty < x_i < \infty} \delta(x - x_i).$$

Полином $C_f^{(1)}$ обладает следующими свойствами [18]:

$$(42) \quad C_f^{(1)} = f(\zeta) - \gamma, \quad \gamma \equiv \langle f(\zeta) \rangle,$$

$$(43) \quad \langle C_f^{(1)}(\zeta) C_f^{(1)}(0) \rangle = \gamma \delta(\zeta),$$

$$(44) \quad \langle C_f^{(1)}(\zeta) C_f^{(1)}(\zeta_1) C_f^{(1)}(0) \rangle = \gamma \delta(\zeta) \delta(\zeta_1).$$

Выражение (40) подставляется в уравнения (37) и (38), которые затем умножаются на $C_f^{(1)}(0)$ и усредняются. Кроме того, (40) подставляется в (39). Окончательная система уравнений имеет вид

$$(45) \quad Fu - F \frac{du}{d\eta^*} (2\eta^* - A) = \frac{A}{Re} \frac{d}{d\eta^*} \eta^* \frac{du}{d\eta^*} + \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial K}{\partial \xi} \omega d\xi,$$

$$(46) \quad u = \frac{1}{\eta^*} \frac{d}{d\eta^*} \eta^* F, \quad \Omega = -\frac{du}{d\eta^*},$$

$$(47) \quad \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \left(u + \frac{1}{\eta^*} \frac{d}{d\eta^*} \eta^* K - c_0 - c_0 \eta \right) \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial K}{\partial \xi} + c_0 \eta \right) \frac{\partial \omega}{\partial \eta^*} + \frac{\partial K}{\partial \xi} \left(\frac{\omega + \Omega}{\eta^*} - \frac{d\Omega}{d\eta^*} \right) - c_0 \omega = \frac{A}{Re} \left(\Delta \omega + \frac{\partial}{\partial \eta^*} \frac{\omega}{\eta^*} \right),$$

$$(48) \quad -\omega = \Delta K + \frac{\partial}{\partial \eta^*} \frac{K}{\eta^*}.$$

Поскольку функции K и ω являются нечетными функциями η^* , то при $\eta^* = 0$ они должны принимать нулевые значения. Такие же значения задаются и при $\eta^* \rightarrow \infty$ (условия затухания структуры в бесконечности). Граничных условий по ξ нет, но есть условие ограниченности энергии пульсаций

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{\partial K}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{1}{\eta^*} \frac{\partial}{\partial \eta^*} \eta^* K \right)^2 \right] d\xi < \infty,$$

которое в предположении о достаточной гладкости заменяется условием

$$K = \omega = 0, \quad \xi \rightarrow \pm \infty.$$

Итак, граничные условия для системы (45) — (46) имеют вид

$$(49) \quad u(0) = 1, \quad u(\infty) = 0, \quad F(A) = A,$$

$$(50) \quad K, \omega(\eta = 0, \eta \rightarrow \infty, \xi \rightarrow \pm \infty) = 0.$$

Система содержит один свободный параметр γ , который имеет ясный физический смысл — среднее число структур на единицу длины. Этот параметр должен выбираться из эксперимента. Скорость движения структуры является собственным параметром задачи, который определяется в процессе ее решения. То есть, отыскивается такое значение c_0 , при котором система (45)–(48) имеет стационарное решение.

3. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА И ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ

Итерационный численный алгоритм аналогичен применяемому ранее авторами для плоского слоя смешения [26, 27]. Он состоит из четырех счетных циклов: определение u и F из (45), (46) методом установления; нахождение значений ω на новом временном слое с помощью схемы стабилизирующей поправки; восстановление по найденным значениям ω „функции тока“ K опять же установлением; и, наконец, определение „нового“ значения параметра c_0 с помощью специальной процедуры, учитывающей характер поведение структуры в новом временном слое. Сетка строилась неравномерной, расширяющейся при $\xi \rightarrow \pm \infty$, $\eta^* \rightarrow \infty$, сгущаясь в окрестности сечения $\eta^* = R/x$. Конвективные члены в (45)–(46) аппроксимировались направленными разностями. Интегрирование (48) проводилось по схеме стабилизирующей поправки.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ. СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

Как уже отмечалось выше, аппроксимация точечной случайной функцией дает полное, хотя и приближенное, статистическое описание искомого случайного решения. То есть, из полученного случайно точечного решения можно подсчитать всевозможные многоточечные статистические характеристики (моменты и кумулянты).

На рис. 2 показаны профили средней скорости и реинольдсового напряжения, которые сравниваются с двумя экспериментальными работами. И здесь, как и в предыдущих работах, применяя метод аппроксимации точечной случайной функцией, наблюдается хорошее количественное согласие одноточечных величин (см. также рис. 3 и 4 об интенсивнос-

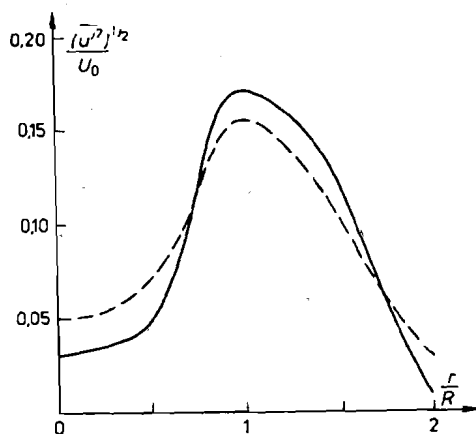
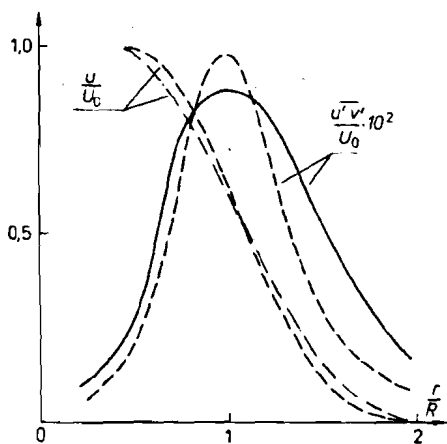


Рис. 2. Профили средней скорости и напряжения Рейнольдса:
 — эксперимент [28];
 - - - эксперимент [29];
 - - - расчет для $x/D = 3$.

Рис. 3. Интенсивность продольной компоненты пульсации:
 — эксперимент [29];
 - - - расчет для $x/D = 4$.

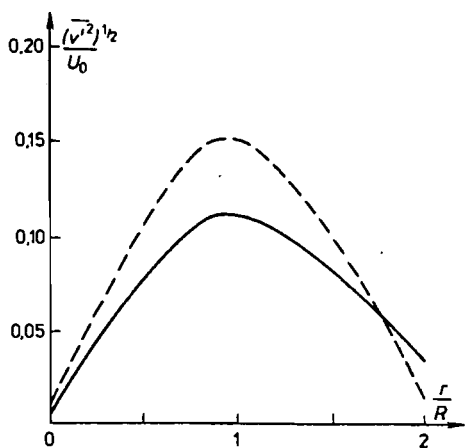


Рис. 4. Интенсивность поперечной компоненты пульсации:

— эксперимент [28];
 - - - - - расчет для $x/D = 4$

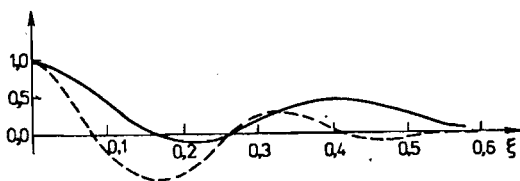


Рис. 5. Корреляционные функции для $\tau = R$ как функции продольной координаты:

— $K_{uu}(\xi)$;
 - - - - - $K_{vv}(\xi)$

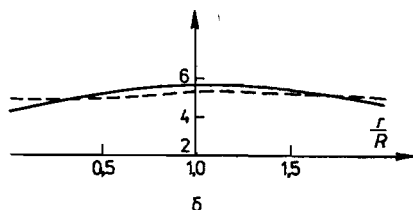
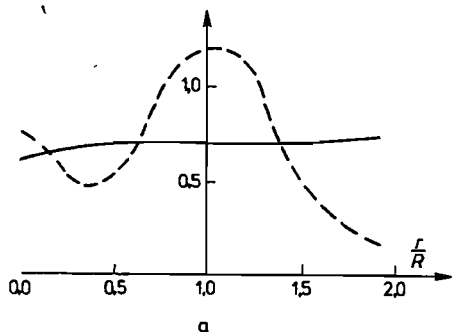


Рис. 6. Высшие кумулянты: а — асимметрия; б — эксцесс

— — — — — продольной компоненты u' ;
 — — — — — поперечной компоненты v'

ти пульсаций). В [17]–[27] обнаружено, что хорошее количественное предсказание сохраняется и для умеренных времен корреляции в двучечных кумулянтах. На рис. 5 приводятся рассчитанные корреляции, но, к сожалению, не удалось найти в литературе экспериментальные данные в начальном участке струи для этих характеристик. На рис. 6 показаны одноточечные кумулянты высшего порядка: асимметрия и эксцесс. Видно, что их значения заметно отличаются от гауссовых.

Статистические характеристики являются лишь небольшой частью той информации, которую можно получить предлагаемым методом. В настоящей работе впервые рассчитана форма единичной структуры. На рис. 7 а) — д) даются изолинии различных мгновенных характеристик когерентной структуры (пульсации). Так как в эксперименте обычно измеряются величины, связанные с полным полем скорости (усредненное и

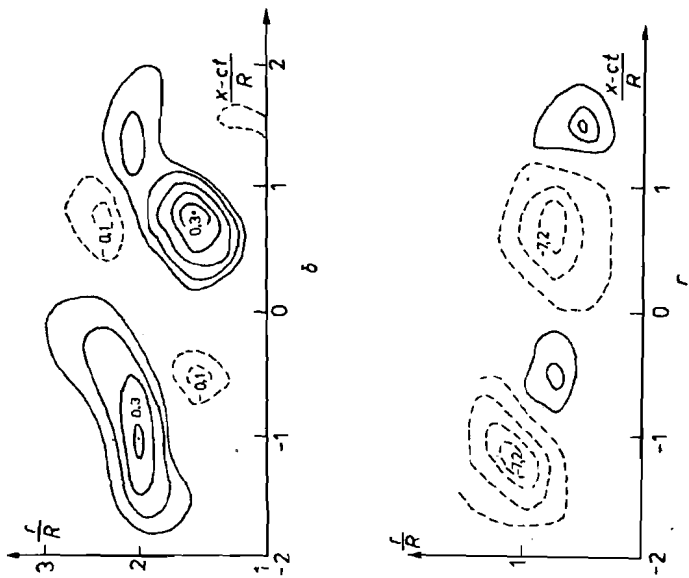
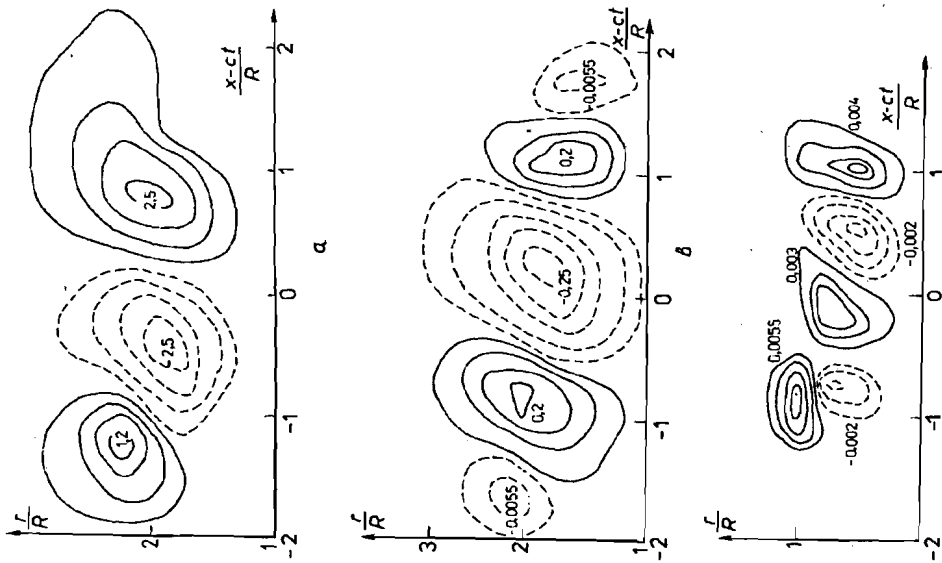


Рис. 7. Мгновенная форма единичной структуры: а — функции тока $\psi' / U_0 x_0$; б — продольной компоненты u' / U_0 ; в — поперечной компоненты v' / U_0 ; г — завихренности $\omega' / U_0 x_0$; д — величины $\frac{u'v'}{U_0^2}$

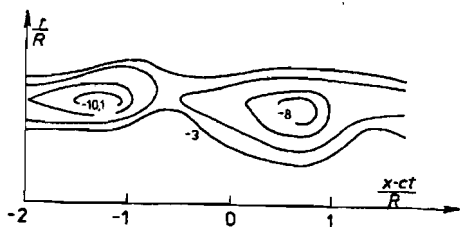


Рис. 8. Изолинии полной завихренности на структуре $[\bar{\omega} + \omega'] \frac{x_0}{U_0}$

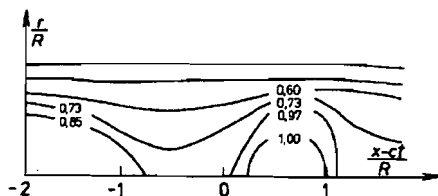


Рис. 9. Изолинии полной продольной компоненты скорости на структуре $\frac{\bar{u} + u'}{U_0}$

пульсационное), здесь приводятся также изолинии полной завихренности (рис. 8) и полной продольной компоненты скорости (рис. 9) в структуре. Можно заключить, что наблюдается хорошее качественное соответствие известным результатам по форме структуры в плоском слое смешения и в развитом участке струи. К сожалению, экспериментальные результаты для формы единичной структуры в начальном участке струи пока нам неизвестны. Хорошее согласие, однако, для усредненных характеристик дает основание полагать, что в настоящей работе получена достаточно адекватная аппроксимация для формы структуры и использованы настоящие результаты при тарировке методик фазового (условного) усреднения для идентификации когерентных структур.

Авторы выражают благодарность Комитету по науке Болгарской Народной Республики за оказанную поддержку при выполнении настоящей работы договором № 9/1987 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гиневский, А. С. Теория турбулентных струй и следов. — Машиностроение, М., 1969.
2. Wignanski, I., H. E. Fiedler. Some measurements in the self-preserving jet. — J. Fluid Mech., 3, 1969, 577-612.
3. Власов, Е. В. Исследование турбулентности в связи с определением акустических характеристик струй. — ИФЖ, В, 1965, № 5, 568-573.
4. Кузов, К. Турбулентная структура затопленной турбулентной струи. — АН СССР, ИТМО — Минск, препринт № 6, 1980.
5. Меликов, А., К. Кузов. Структура на свободна ососиметрична струя при различни условия в началото сечение. — Нац. научно-техн. конф. с междунар. участием „Тепло- и ядерные энергетические проблемы НРБ“, Варна, 17-19, 05. 1984, т. 1, 245 — 250.
6. Хуссейн, А. К. М. Ф., З. Д. Хуссейн. Структура турбулентности в осесимметричных свободных слоях смешения. — РТК, 18, 1980, № 12, 68-77.
7. Шербина, Ю. А. О влиянии начальной турбулентности на границы и дальности струи. — Тр. МФТИ, вып. 7, Оборонгиз, М., 1981.
8. Гиневский, А. С., Е. В. Власов. Когерентные структуры в турбулентных струйных течениях. — В: Модели механики сплошной среды, ИТПМ СО АН СССР, Новосибирск, 1983, 91-98.
9. Ко, N. W. H., P. O. A. L. Davies. The near field within the potential core of subsonic cold jets. — J. Fluid Mech., 50, 1971, 49-78.

10. Кузов, К. П., А. Меликов. К вопросу о структуре затопленной осесимметричной струи в ее начальной области. — ИФЖ, **34**, 1980, № 5, 788–793.
11. Lau, J. C., M. J. Fisher. The vortex street structure of "turbulent" jets. — J. Fluid Mech., **67**, 1975, 299–337.
12. Zaman, K. B. M. Q., A. K. M. F. Hussain. Naturel large-scale structures in the axisymmetric mixing layer. — J. Fluid Mech., **138**, 1984, 325–351.
13. Zaman, K. B. M. Q., A. K. M. F. Hussain. Vortex pairing in a circular jet under controlled excitation. — J. Fluid Mech., **101**, 1980, 449–544.
14. Tso, J., L. S. G. Kovasznay, A. K. M. F. Hussain. Search for large scale coherent structures in nearly self-preserving region of a turbulent axisymmetric jet. — Trans. ASME: J. Fluid Engr., **103**, 1981, №4, 503–508.
15. Рид, К. Б., Л. Шпигель, С. Хартланд. Некоторые измерения пространственных корреляций в осесимметричной струе. — В: Турбулентные сдвиговые течения, т. 1, Машиностроение, М., 1982.
16. Кузнецов, П. П. Крупномасштабные вихри на начальном участке струи. — ИАЭ им. М. В. Курчатова, Препринт 3342, М., 1980.
17. Христов, Х. И. Об одном каноническом разложении случайных процессов и его применение к турбулентности. — ВАН ТПМ, **11**, 1980, № 1, 59–66.
18. Christov, C. I. Poisson-Wiener expansion in nonlinear stochastic systems. — Ann. Univ. Sof., Fac. Math. Mech., **75**, 1981, 1985, l. 2 — Mécanique, 143–165.
19. Christov, C. I. Stochastic regime for Kuramoto-Sivashinsky equation. Part I — Random point approximation. — Ann. Univ. Sof., Fac. Math. Inf., **81**, 1987, this volume.
20. Христов, Х. И., В. П. Нартов. Бифуркация и появление стохастического решения в одной вариационной задаче, связанной с плоским течением Пуазейля. — ДАН СССР, **277**, 1984, 825 — 828.
21. Христов, Х. И., В. П. Нартов. Бифуркация и появление стохастического решения в одной вариационной задаче, связанной с плоским течением Пуазейля. — В: Численное моделирование в динамике жидкости, Новосибирск, 1983, 124–144.
22. Christov, C. I., V. P. Nartov. On a bifurcation and emerging of a stochastic solution in a variational problem for Poiseuille flows. — In: Laminar-Turbulent Transition, IUTAM Symposium, Novosibirsk, 1984, Springer, Berlin-Heidelberg, 1985, 227–232.
23. Христов, Х. И. Принцип наименьшей диссипации и возможность его применения к турбулентному течению в плоском канале. — Докл. АН СССР, **245**, 1979, 1071–1075.
24. Нартов, В. П., Х. И. Христов. Структурная турбулентность в МГД течениях. — В: Физическая механика неоднородных сред, ИТПМ СО АН СССР, Новосибирск, 1984, 24–26.
25. Нартов, В. П., Х. И. Христов. Стохастический режим в течениях с медленным изменением структуры в продольном направлении. — В: Моделирование процессов гидродинамики и энергетики, Новосибирск, ИТПМ СО АН СССР, 1985, 143 — 144.
26. Нартов, В. П. Стохастический режим в слое смешения. — Препринт № 24, ИТПМ СО АН СССР, Новосибирск, 1986, 39 с.
27. Нартов, В. П., Х. И. Христов. Численное исследование режима типа точечной случайной функции в плоском слое смешения. — Числ. мет. мех. сплошн. среды, 1988 (в печати).
28. Bradshaw, P., H. Ferriso, R. E. Johnson. Turbulence in noiseproducing region of circular jet. — J. Fluid Mech., **19**, 1964, 591–624.
29. Меликов, А. К. Экспериментально исследован механизм на генерирание на турбулентност в свободно струйно течение след стабилизирущи решетки. — Канд. дис., ВМЕИ, С., 1979.
30. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя. М., Наука, 1974.

Поступила на 31.03.1988 г.