

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Книга 2 — Механика

Том 82, 1988

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA "ST. KLIMENT OHRIDSKI"

FACULTE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Livre 2 — Mécanique

Tome 82, 1988

---

## ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ НЕВЯЗКОГО ОТРЫВА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ОБТЕКАНИЯ КРЫЛЬЕВЫХ ПРОФИЛЕЙ

МИХАИЛ ТОДОРОВ, ХРИСТО И. ХРИСТОВ

*Михаил Тодоров, Христо И. Христов*. ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ НЕВЯЗКОГО ОТРЫВА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ОБТЕКАНИЯ КРЫЛЬЕВЫХ ПРОФИЛЕЙ

Численно решена задача отрывного обтекания крыльевых профилей в невязкой жидкости (задача Гельмгольца). В широком диапазоне углов атаки определена форма застойной зоны. Рассчитанные значения гидродинамических сил (лобовое сопротивление и подъемная сила) сравнены с известными экспериментальными результатами для трех профилей и на этом основании оценена применимость данной модели.

*Michael Todorov, Christo I. Christov*. AN APPLICATION OF INVISCID SEPARATION MODEL FOR INVESTIGATION OF FLOWS AROUND AIRFOILS

The inviscid separated flow around three airfoils is investigated numerically (Helmholtz problem). The shape of stagnation zone for a wide range of angles of attack is computed. The calculated values of hydrodynamical forces (resistance and lift) are compared with experimental data available and thus the validity of model is assessed.

## ВВЕДЕНИЕ

Исследование свойств течений вокруг несущих профилей (крыльев под углом атаки), кроме теоретического, имеет большое практическое значение, особенно в самолетостроении и судостроении. Как хорошо известно, отрыв и развитие застойной зоны и кавитации за такими телами оказывает существенное влияние на их гидродинамические характеристики и, в частности, сопровождается значительным нарастанием сопротивления. Это обуславливает необходимость создания подходящих моделей, адекватно учитывающих основные свойства этих течений, а также эффективных алгоритмов для решения возникающих на основе этих моделей задач.

Из литературы известно, что постулат Кута — Жуковского дает рецепт, позволяющий из бесконечного числа циркуляционных потенциальных течений выбрать то, которое обтекает безотрывно заднюю кромку. Подъемная сила определяется из теоремы Жуковского, а сопротивление равно нулю в соответствии с парадоксом Даламбера (см. например [1] и [2]). Разработанная в [3], [4] и [5] численная методика нахождения невязкого отрывного течения вокруг затупленных тел, основанная на предположении, что область течения составлена из потенциальной и застойной зон, разделенных неизвестной границей (задача Гельмгольца) [6], в настоящей работе применена для вычисления таких течений вокруг крыльевых профилей. Так как будем искать отрывные течения, то в задней кромке дополнительные условия о характере течения не будем ставить, а гидродинамические силы будем определять, интегрируя поверхностное давление при наличии отрыва.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим плоское стационарное потенциальное течение вокруг бесконечно длинного крыла под углом атаки, что позволяет ограничиться рассмотрением течения вокруг произвольного его поперечного сечения. Предположение о безвихренности позволяет ввести функцию тока  $\psi$ , являющуюся решением уравнения Лапласа  $\Delta\psi = 0$ . Задачу решаем в двух координатных системах. Цилиндрические координаты используются только на этапе начального развития застойной зоны, а конечный результат получается в параболических координатах, которые оказываются очень удобными для бесконечно длинных застойных зон.

В этих координатных системах уравнение Лапласа имеет вид

$$(1a) \quad \psi_{rr} + \frac{1}{r}\psi_r + \frac{1}{r^2}\psi_{\theta\theta} = 0; \quad (1b) \quad \frac{1}{\sigma^2 + \tau^2}(\psi_{\sigma\sigma} + \psi_{\tau\tau}) = 0$$

с граничными условиями на бесконечности

$$(2a) \quad \psi \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} U_\infty r \sin \theta; \quad (2b) \quad \psi \underset{\substack{\sigma \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow \pm \infty}}{\sim} U_\infty \sigma \tau$$

и с условиями непротекания на границе (твердой и свободной) (рис. 1)

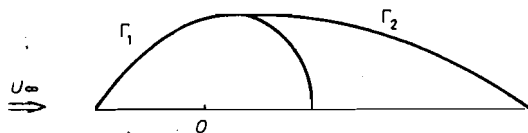


Рис. 1

$$(3a) \quad \psi = 0 \quad \text{для} \quad r = R(\theta); \quad (3b) \quad \psi = 0 \quad \text{для} \quad \sigma = S(\tau), \quad \tau \in \Gamma.$$

На известной свободной границе выполняется интеграл Бернулли:

$$(4a) \quad \frac{1}{2} [\psi_r^2 + \frac{1}{r^2} \psi_\theta^2] + \frac{p_c}{\rho} = U_\infty + \frac{p_\infty}{\rho}, \quad r = R(\theta), \quad \theta \in \Gamma_2;$$

$$(4b) \quad \frac{1}{2(\sigma^2 + \tau^2)} [\psi_\sigma^2 + \psi_\tau^2] + \frac{p_c}{\rho} = U_\infty + \frac{p_\infty}{\rho}, \quad \sigma = S(\tau), \quad \tau \in \Gamma_2,$$

где  $p_\infty$  и  $U_\infty$  — давление и скорость на бесконечности, а  $p_c$  — давление в застойной зоне. Здесь  $a$  и  $b$  соответствуют цилиндрической и параболической координатной системам.

## II. ЗАМЕНА КООРДИНАТ

Краевая задача (1)–(4) корректна, но ее решение связано с преодолением больших трудностей, так как границы области криволинейны, а свободная граница определяется неявным образом путем удовлетворения условия (4). После введения подходящих координатных трансформаций область течения преобразуется в область с фиксированными границами (о деталях см. [4] и [5]), которые уже являются координатными линиями, а условие (4) сводится к следующему явному уравнению для определения свободной границы:

$$(5a) \quad \frac{1}{R^2} [1 + (R'/R)^2] \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} \right]^2 = 1 + \kappa, \quad \theta \in \Gamma_2,$$

$$(5b) \quad \frac{1}{S^2 + \tau^2} [1 + S'^2] \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} \right]^2 = 1 + \kappa, \quad \tau \in \Gamma_2,$$

где  $\kappa$  — число кавитации. Так как рассматриваем течения с застойными зонами, положим  $\kappa = 0$ .

### III. ВЫЧИСЛЕНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ

После разложения главного вектора давления  $\mathbf{R} = - \oint_{\Gamma} p \mathbf{n} ds$ , по осям декартовой координатной системы, для безразмерных коэффициентов лобового сопротивления и подъемной силы в параболических координатах получаем следующие выражения:

$$(6) \quad C_x \doteq \int_{-\tau_1}^{\tau_1} q[S(\tau) + S'(\tau)\tau]d\tau,$$

$$(7) \quad C_y = - \int_{-\tau_1}^{\tau_1} q[\tau - S'(\tau)S(\tau)]d\tau,$$

где  $p$  — давление на замкнутом контуре  $\Gamma$ , а  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к нему,  $q = \frac{p - p_c}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$  — безразмерное давление,  $p_c$  — давление в застойной зоне, а  $S(\tau)$ ,  $-\tau_1 \leq \tau \leq \tau_1$ , — функция, описывающая границы контура  $\Gamma$ .

### IV. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ КРЫЛЬЕВЫХ ПРОФИЛЕЙ

Объектом исследования являются три крыльевых профиля. Первый из них (трехпараметрический типа PAN) задаем аналитически в виде (рис. 2):

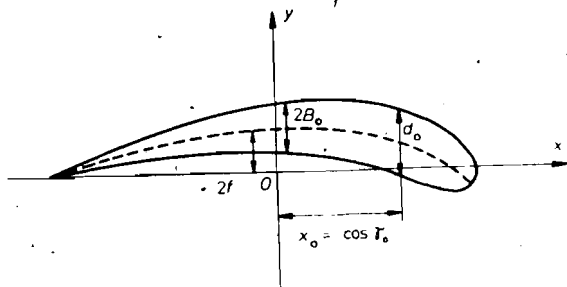


Рис. 2

$$(8) \quad \begin{cases} x = \cos \gamma \\ y = 2f \sin \gamma \pm Y(\gamma), \end{cases} \quad 0 \leq \gamma \leq \pi,$$

где

$$Y(\gamma) = \left(B_0 + \frac{B_1}{2}\right) \gamma + B_0 \sin \gamma - B_1 \frac{\sin 2\gamma}{4} - \frac{\pi}{2} \left(B_0 + \frac{B_1}{2}\right) (1 - \cos \gamma),$$

$2f$  — кривизна,  $2B_0$  — толщина в точке  $x = 0$ , а  $B_1$  определяет положение максимальной толщины. Со своей стороны,  $B_0$  и  $B_1$  являются функциями

независимых параметров — максимальной толщины профиля  $d_0$  и угла  $\gamma_0$ , который задает положение  $d_0$  (см. [7], [8])

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} B_1(\gamma_0, B_0) &= -\frac{2B_0(1 + \cos \gamma_0 - \frac{\pi}{2} \sin \gamma_0)}{1 - \cos 2\gamma_0 - \frac{\pi}{2} \sin \gamma_0} \\ B_0(d_0, \gamma_0) &= \frac{d_0}{2C'(\gamma_0)} \\ C'(\gamma_0) &= \left( \gamma_0 + \sin \gamma_0 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cos \gamma_0 \right) \\ -2 \left[ \frac{\gamma_0}{2} - \frac{\sin 2\gamma_0}{4} - \frac{\pi}{4} (1 - \cos \gamma_0) \right] &\cdot \frac{\left[ 1 + \cos \gamma_0 - \frac{\pi}{2} \sin \gamma_0 \right]}{\left[ 1 - \cos 2\gamma_0 - \frac{\pi}{2} \sin \gamma_0 \right]} \end{aligned} \right.$$

Переход к полярным координатам задается формулами:

$$(10) \quad R(\theta) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctg \frac{y}{x}.$$

В данном случае полагаем  $f = 0$ ,  $d_0 = 0.25$  и  $\gamma_0 = \pi/2$  и получаем симметрический профиль.

Второй профиль — это NACA 663-018. Дискретизация в направлении  $\theta$ -координаты основана на табличном задании геометрии профиля (табл. 1)[9]. Влияние задней кромки учтено добавлением 10 дополнительных уз-

Т а б л и ц а 1

$x$	$y$	$x$	$y$
0	0	0.4	0.08918
0.005	0.01323	0.45	0.08998
0.0075	0.01571	0.5	0.08942
0.0125	0.01952	0.55	0.08733
0.025	0.02646	0.6	0.08323
0.05	0.0369	0.65	0.0758
0.075	0.04513	0.7	0.06597
0.1	0.0521	0.75	0.05451
0.15	0.0633	0.8	0.04206
0.2	0.07188	0.85	0.02934
0.25	0.07848	0.9	0.01714
0.3	0.08346	0.95	0.00646
0.35	0.08701	1	0

лов в соответствии с линейным законом

$$(11) \quad y = \frac{0.00646}{0.05}(1 - x)$$

(по 5 в верхней и нижней половине профиля). Аналогичным образом при помощи параболической интерполяции

$$(12) \quad x = ay^2 + by,$$

где

$$a = \frac{0.0075 \times 0.01323 - 0.01571 \times 0.005}{0.01571 \times 0.01323 \times (0.01571 - 0.01323)},$$

$$b = \frac{0.001571^2 \times 0.005 - 0.01323^2 \times 0.0075}{0.01571 \times 0.1323 \times (0.01571 - 0.01323)},$$

в окрестности передней кромки профиля добавлено 6 узлов (по 3 в верхней и нижней половине). Функция границы задается по формулам (10).

Третий крыльевой профиль, для которого решена задача о невязком отрывном обтекании под углом атаки, — *NACA 2418*. Его геометрия задается следующим образом:

$$(13) \quad \begin{aligned} x_u &= x - y_t \sin \beta, & x_l &= x + y_t \sin \beta, \\ y_u &= y_c + y_t \cos \beta, & y_l &= y_c - y_t \cos \beta, \end{aligned}$$

где  $x$  — абсциссы точек хорды,  $y_c$  и  $\operatorname{tg} \beta$  — ординаты и наклон точек скелетной линии,  $x_u, y_u$  — декартовы координаты точек верхней и нижней поверхности профиля,  $y_t$  — распределение толщины (рис. 3) [9]. Со своей

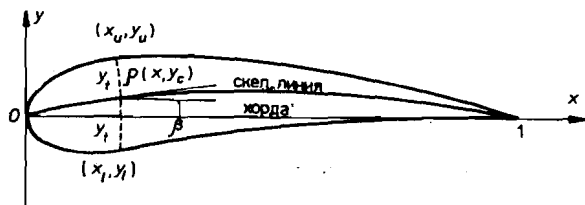


Рис. 3

стороны,

$$y_t = \frac{t}{0.2} (0.269\sqrt{x} - 0.126x - 0.3516x^2 + 0.2843x^3 - 0.1015x^4),$$

где  $t$  — максимальная толщина,

$$y_c = \begin{cases} \frac{m}{p^2}(2px - x^2), & 0 \leq x \leq p, m < 1, \\ \frac{m}{(1-p^2)}[(1-2p) + 2px - x^2], & p < x < 1, \end{cases}$$

где  $m$  — ордината точки скелетной линии с максимальной кривизной, а  $p$  — абсцисса точки максимальной кривизны. В конкретном случае  $t = 0.18$ ,  $m = 0.02$ ,  $p = 0.4$ . Переход от декартовых к цилиндрическим координатам производится по формулам (10).

## V. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

В терминах новых координат уравнение Лапласа решается эффективно по методу стабилизирующей поправки (детали см. в [4]). Здесь следует отметить, что в линейном случае эта схема абсолютно устойчива [10], но в данном случае нелинейный характер задачи, наличие кривой производной, сложная геометрия крыла и наличие больших градиентов скорости в окрестности задней кромки являются факторами, которые могут привести к численной неустойчивости в ходе вычислений. Таким образом, является целесообразным автоматическое уменьшение шага по фиктивному времени  $\Delta t$  в схеме стабилизирующей поправки каждый раз, когда возникает немонотонность в сходимости итерационного цикла функции тока  $\psi$ . Точнее — если на  $n$ -ой итерации выполнено  $\epsilon_r^n > \epsilon_r^{n-1}$ , где  $\epsilon_r^n$  и  $\epsilon_r^{n-1}$  — относительные ошибки, будем полагать  $\Delta t = \frac{\Delta t}{2}$ .

## VI. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ

Важно отметить, что возможно получить два разных решения уравнения (5), которые для удобства назовем I и II и которые интерпретируем как кавитационные схемы соответственно типа Чаплыгина — Кольшера и Кирхгофа (о деталях см. [4] и [5]). Из-за нелинейности уравнения (5) решающее значение для нахождения устойчивого решения для формы свободной границы имеет подходящий выбор параметра релаксации  $\tau_2$ . Результаты многочисленных экспериментов показали, что использование больших  $\tau_2 \sim 0.1 \div 0.5$  может привести к "выходу" решения II на более высокую параболу, чем искомая, а это неминуемо связано с нарушением краевого условия (давление на свободной границе равно нулю  $q = 0$ ). С другой стороны, использование малых  $\tau_2 \sim 0.001$ , приводит к увеличению числа итераций и последующим затратам машинных ресурсов. Поэтому в настоящих расчетах использованы параметры релаксации  $\tau_2 \sim 0.01, 0.005$ . Результаты проведенных численных экспериментов показывают, что при этих двух значениях параметра релаксации разница между рассчитанными решениями не превосходит ошибки аппроксимации разностной схемы.

## VII. ОБЩАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ АЛГОРИТМА

Для несимметрических тел (или, что то же самое, для симметрических под углом атаки) решение краевой задачи (1)–(4) связано с двумя вопросами принципиального характера. Первый из них относится к определению нулевой линии тока на бесконечности, т. е. линии  $\theta = 0, \pi$ , на которой застойная зона замыкается в полярных координатах. Эта линия может быть определена точкой пересечения свободных границ за телом и

направлением невозмущенного течения. Для этой цели ось  $Ox$ , совпадающую с хордой крыльцевого профиля, ориентируем в направлении основного течения следующим образом:

$$(14) \quad \theta_j =: \theta_j - \alpha, \quad j = 1, \dots, N,$$

где  $\theta$ -сетка задана предварительно по формуле:

$$(15) \quad \theta_j = 4\pi \frac{(j-1)^2}{2}, \quad \theta_{j+\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1} = 4\pi \left( \frac{1}{2} - \frac{(j-1)^2}{N^2} \right).$$

Здесь  $j = 1, \dots, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1$ ,  $N$  — число  $\theta$ -линий, а  $\alpha$  — угол атаки, образованный пересечением хорды профиля и направления основного течения (рис. 4). Разработана процедура перехода от одной полярной координаты

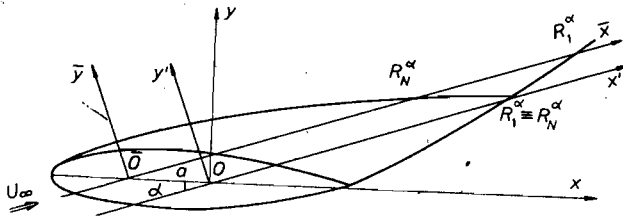


Рис. 4

натной системы к другой, включающая трансляцию полярного центра по хорде крыльцевого профиля и определение новой  $\theta$ -сетки:

$$(16) \quad \begin{cases} \theta_j = \arctg \frac{R_{j_1} \sin \theta_{j_1} - a \sin \alpha}{R_{j_1} \cos \theta_{j_1} + a \cos \alpha}, & \theta_1 = 0, \quad \theta_N = \theta_1, \\ R_1 = \frac{-R_{j_n} \theta_{j_{n-1}} + R_{j_{n-1}} \theta_{j_n}}{\theta_{j_n} - \theta_{j_{n-1}}}, & R_N = R_1, \\ R_j = \sqrt{R_{j_1}^2 + a^2 + 2aR_{j_1} \cos(\theta_{j_1} + \alpha)} & \text{за } j = 2, \dots, N-1, \end{cases}$$

где  $j_1 = j_n + j - 2$ ,  $j_n$  — узел, в котором полярный угол  $\theta_j$  (см. (14)) меняет свой знак (становится положительным), а  $a$  — параметр трансляции. В расчетах использовалось  $a = \pm 0.1$ . Итак, решается соответствующий разностный аналог краевой задачи (1)–(4) (см. [4]) в полярных координатах. На каждой общей итерации с порядковым номером  $\alpha$  делаем следующие проверки:

Если  $R_1^\alpha > R_N^\alpha$  и  $\left| \frac{R_N^\alpha - R_1^\alpha}{R_N^\alpha} \right| > 0.1$ , то  $a = 0.1$  и совершаем трансляцию по формулам (16).

Если  $R_1^\alpha < R_N^\alpha$  и  $\left| \frac{R_N^\alpha - R_1^\alpha}{R_N^\alpha} \right| > 0.1$ , то  $a = -0.1$  и совершаем трансляцию по формулам (16).

Если выполнено  $\left| \frac{R_N^\alpha - R_1^\alpha}{R_N^\alpha} \right| \leq 0.1$ , то считаем, что найдена нулевая линия тока. Однако поиск нулевой линии тока по этой процедуре не всегда возможен. Из-за нелинейности рассматриваемой задачи и сложной геометрии после известного числа итераций вычисленный центр транслируемой координатной системы может оказаться вне контура крыла. Вот почему переход к параболическим координатам следует осуществлять прежде чем застойная зона развилась достаточно в полярных координатах, одновременно дополняя ее до "актуальной"  $\tau$ -бесконечности, полагая  $S = 0$ . Вопрос о нахождении нулевой линии тока не оказывает влияния на дальнейший ход расчетов вследствие открытого характера застойной зоны. В случае профиля *PAN* координатное начало расположено на хорде в точке  $x = 0.21$ . Определенная таким образом линия  $\theta = 0, \pi$  оказывается самой подходящей. В двух других случаях (*NACA 663-18* и *NACA 2418*) координатное начало расположено на хорде соответственно в точке  $x = 0.45$ .

Второй вопрос принципиального характера относится к адекватному заданию задней кромки. Проведенные расчеты ясно и недвусмысленно показали, что использовать  $\theta$ -сетку, не учитывающую наличия критической точки, нельзя, так как само по себе это ведет к бесконечным градиентам давления в ее окрестности, к вырождению поля скорости вокруг профиля и, в конечном счете, к возникновению неустойчивости итерационного процесса. Поэтому приходится сильно сгущать  $\theta$ -сетку в окрестности критической точки и задавать односторонние производные функции границы в этой точке:

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} R_r' |_{j=j_t} &= R_j \frac{2g_{j+1} + g_{j+2}}{g_{j+1}(g_{j+1} + g_{j+2})} + R_{j+1} \frac{g_{j+1} + g_{j+2}}{g_{j+1}g_{j+2}} \\ &\quad - R_{j+2} \frac{g_{j+1}}{g_{j+2}(g_{j+1} + g_{j+2})} + O(g_{j+1}g_{j+2}), \\ R_l' |_{j=j_t} &= R_{j-2} \frac{g_j}{g_{j-1}(g_{j-1} + g_j)} - R_{j-1} \frac{g_{j-1} + g_j}{g_{j-1}g_j} \\ &\quad + R_j \frac{g_j + 2g_{j-1}}{g_j(g_{j-1} + g_j)} + O(g_{j-1}g_j), \\ R_r'' |_{j=j_t} &= 2 \left( R_j \frac{1}{g_{j+1}(g_{j+1} + g_{j+2})} - R_{j+1} \frac{1}{g_{j+1}g_{j+2}} \right. \\ &\quad \left. + R_{j+2} \frac{1}{g_{j+1}(g_{j+1} + g_{j+2})} \right) + O(g_{j+1}g_{j+2}), \\ R_l'' |_{j=j_t} &= 2 \left( R_j \frac{1}{g_j(g_{j-1} + g_j)} - R_{j-1} \frac{1}{g_{j-1}g_j} \right. \\ &\quad \left. + R_{j-2} \frac{1}{g_{j-1}(g_{j-1} + g_j)} \right) + O(g_{j-1}g_j), \end{aligned} \right.$$

где  $R_l' |_{j_t}$ ,  $R_r' |_{j_t}$  и  $R_l'' |_{j_t}$ ,  $R_r'' |_{j_t}$ , — первая левая и правая и вторая левая и правая производные в задней кромке. Это делаем только на первой

итерации в полярных координатах, так как на следующих шагах особая точка остается в застойной зоне (рис. 5). Более того, дальнейшее ре-

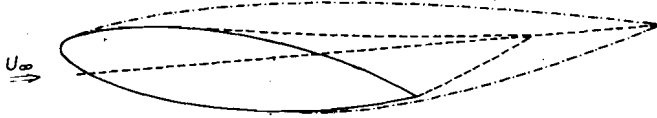


Рис. 5

шение разностной задачи с введенной таким образом  $\theta$ -сеткой невозможно. Численным экспериментом установлено, что краевое условие на теле (3), соответствующее разностной линии  $\theta_{jt}$  (где находится особая точка), "проектируется" на бесконечности, т. е. краевые условия рассматриваемой разностной задачи нарушаются. Этот недостаток успешно преодолевается увеличением шага сетки в окрестности особой точки еще до второй общей итерации. Подобный численный эффект красноречиво говорит в пользу выбора сильно сгущенной сетки только в окрестности особой точки (кромки).

Для трех рассматриваемых крыльевых профилей после первой общей итерации в полярных координатах "удаляются" 10 узлов в окрестности задней кромки и потом, после перехода к параболическим координатам, добавляются 10 узлов до  $\tau_\infty$ . Одновременно с этим  $\tau$ -сетка снова нумеруется.

## VIII. РЕЗУЛЬТАТЫ И ДИСКУССИЯ

Численные расчеты в случае профиля *PAN* проведены на неравномерной сетке  $61 \times 45$  (о дефиниции сетки см. выше, а также [4]), а использованный шаг по фиктивному времени  $\Delta t = \frac{1}{4}$ . Получены результаты о форме решения II, когда угол атаки  $\alpha \in [0^\circ, 14^\circ]$  и до  $\alpha = 20^\circ$  в случае решения I. В интервале  $\alpha \in [0^\circ, 10^\circ]$  схема стабилизирующей поправки остается устойчивой при заданном значении параметра  $\Delta t$ . При  $\alpha = 12^\circ$  она устойчива в случае решения I, если  $\Delta t = \frac{1}{32}$ , и в случае решения II — если  $\Delta t = \frac{1}{8}$ , а при  $\alpha = 14^\circ$  она устойчива, если соответственно  $\Delta t = \frac{1}{128}$  и  $\Delta t = \frac{1}{16}$ . При углах атаки  $\alpha \geq 16^\circ$  необходимый шаг по фиктивному времени в случае решения I становится очень малым —  $\frac{1}{4028}$ . При углах атаки  $\alpha \geq 14^\circ$  решение II невозможно получить из-за возникновения неустойчивости (возможные причины были рассмотрены выше). Относительным нормам функции тока, свободной границы и общей итерации заданы значения  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$  и  $10^{-3}$  соответственно. Число общих итераций

при фиксированном угле атаки варьирует в интервале 27–39 в случае решения I и 150–245 в случае решения II. Необходимое время программной реализации на ЭВМ ЕС 1061 не превосходит 2 и 9 минут соответственно.

В случае профиля *NACA 66<sub>3</sub>-018*, вследствие добавления дополнительного числа узлов в окрестностях задней угловой точки и передней кромки, задача решена на разностной сетке 61 × 65. Результаты численных экспериментов показывают, что в этом случае схема стабилизирующей поправки устойчива, если шаги по фиктивному времени меньше шага, соответствующего профилю *PAN* (табл. 2). Число общих итера-

Т а б л и ц а 2

Угол атаки $\alpha$ (в градусах)	Шаг по фиктивному времени $\Delta t$	
	решение I	решение II
0	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{128}$
2	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{128}$
4	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{512}$
6	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$
8	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{512}$
10	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{512}$
12	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{1024}$
14	$\frac{1}{1024}$	
16	$\frac{1}{1024}$	
18	$\frac{1}{2048}$	

ций в различных вариантах варьирует в интервале 34–42 для решения I и 58–221 для решения II. Соответственно необходимое машинное время для расчета данного варианта на ЭВМ ЕС 1061 составляет 2–3 минуты и 3–10 минут. Рассчитана форма свободной границы в диапазоне  $\alpha \in [0^\circ, 18^\circ]$  для решения I и  $\alpha \in [0^\circ, 12^\circ]$  для решения II, но при  $\alpha > 10^\circ$  последнее теряет устойчивость и приходится сильно уменьшать значение параметра релаксации ( $\tau_2 < 0.001$ ).

Численные расчеты для профиля *NACA 2418* (аналогично профилю *PAN*) выполнены на разностной сетке 61 × 45. Решение I получено при углах атаки  $\alpha \in [0^\circ, 16^\circ]$ , а решение II — при  $\alpha \in [0^\circ, 14^\circ]$ . Начальное значение шага по фиктивному времени  $\Delta t = \frac{1}{4}$ . В зависимости от угла атаки

схема стабилизирующей поправки устойчива в интервале  $\Delta t \sim \frac{1}{16} \div \frac{1}{512}$  (табл. 3). В случае решения I необходимое машинное время остается в интервале 2–4 минуты, а для решения II — 7–9 минут. Соответствующее число общих итераций 31–50 для решения I и 144–207 — для решения II.

Во всех трех случаях, когда углы атаки велики, отрыв происходит собственно на задней кромке. Тогда, чтобы не допустить возникновения больших градиентов давления, приходится производить дополнительное

Угол атаки $\alpha$ (в градусах)	Шаг по фиктивному времени $\Delta t$	
	решение I	решение II
0	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$
2	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$
4	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$
6	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$
8	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{64}$
10	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{512}$
12	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$
14	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{32}$
16	$\frac{1}{256}$	

сгущение разностной сетки в окрестности точки отрыва. Поэтому использована разностная сетка  $61 \times 90$ .

Независимо от того, что решение, соответствующее профилю *PAN*, имеет характер теста, полученные результаты находятся в хорошем ка-

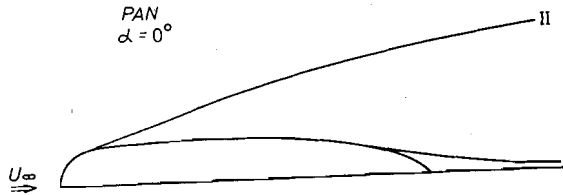


Рис. 6

чественном согласии с известными экспериментальными данными о течениях вокруг крыла с образованием застойных зон. На рис. 6, 7, 8 представлены границы застойных зон, соответствующих углам атаки  $\alpha = 0^\circ, 6^\circ, 14^\circ$ . Общей закономерностью является то, что решение I замыкается в бесконечной точке, а решение II расширяется параболически на бесконечности. В случаях  $\alpha = 6^\circ, 14^\circ$  хорошо видно, что выбор подходящего параметра релаксаций влияет существенным образом на поведение решения II. Очевидно, что при  $\alpha = 6^\circ$  значение параметра  $\tau_2 = 10^{-1}$  не является достаточно малым, в то время как при  $\tau_2 = 5 \times 10^{-2}$  и  $\tau_2 = 10^{-2}$  разница между рассчитанными решениями II составляет уже всего 2–3%. Это дает нам основания утверждать, что уменьшение параметра релаксации до  $\tau_2 = 5 \times 10^{-2}$  вполне достаточно для нахождения искомого решения с достаточной точностью. Из рис. 8 ясно видно, что с увеличением угла атаки следует надлежащим образом уменьшать  $\tau_2$ , т. е. усилить ограничивающее действие релаксации. На рис. 9, 10, 11 даны поверхностные распределения давления при тех же углах атаки, соответствующих реше-

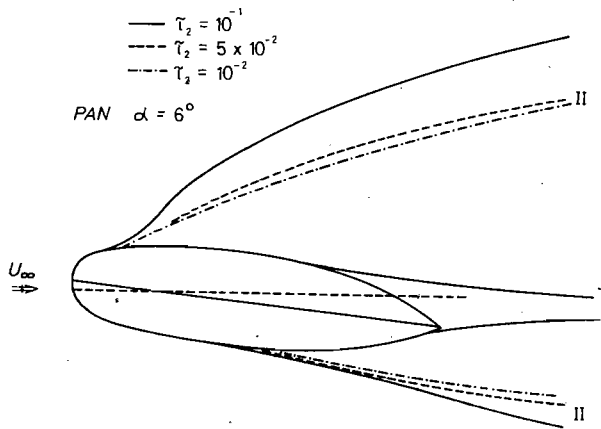


Рис 7

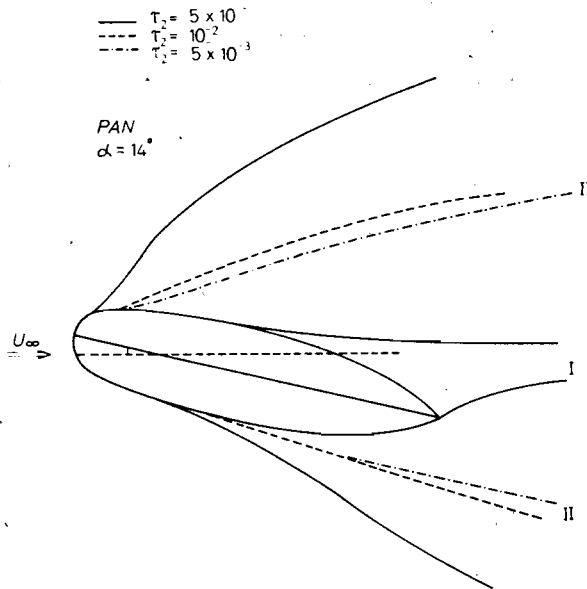


Рис 8

нию I, а на рис. 12 — решению II при  $\alpha = 12^\circ$ . На свободных границах значения давления имеют порядок  $10^{-3}$ – $10^{-5}$ , т. е. в рамках ошибки аппроксимации схемы давление постоянно и равно нулю. На рис. 13, 14 графически представлены результаты о коэффициентах сопротивления и подъемной силе. Как хорошо видно, в случае решения II подъемная сила и сопротивление являются величинами одного порядка, т. е. подъем-

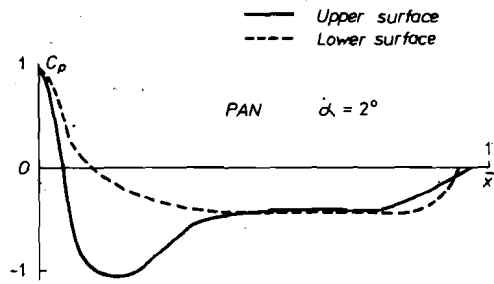


Рис. 9

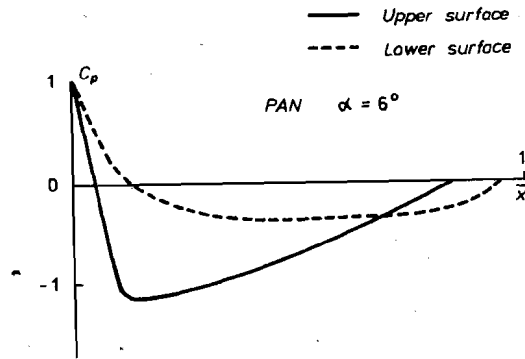


Рис.10

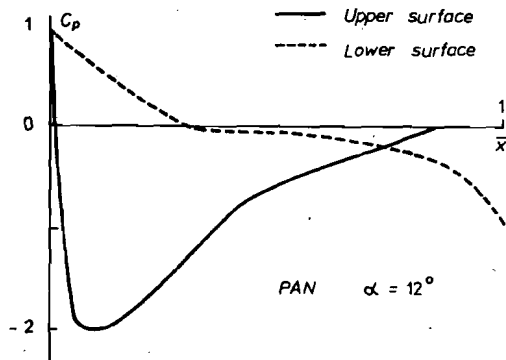


Рис.11

ная сила, соответствующая отрыву у передней кромки, мала. Наоборот, в случае решения I сопротивление приблизительно в 1,5–2 раза меньше, чем в случае решения II, а подъемная сила примерно в 10 раз больше, чем та, которая соответствует отрыву у передней кромки (решение II). Нарастание угла атаки до  $8^\circ$  сопровождается постепенным сдвигом точки отрыва решения I на нижней половине от 85% относительно длины хорды (при  $\alpha = 0^\circ$ ) к задней кромке (табл.4). При больших значениях угла

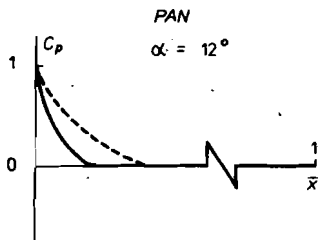


Рис.12

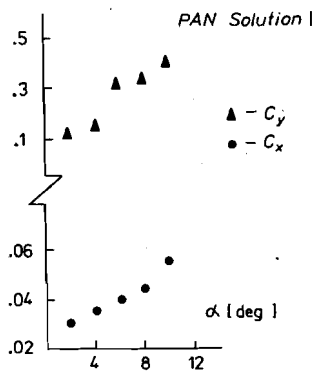


Рис.13

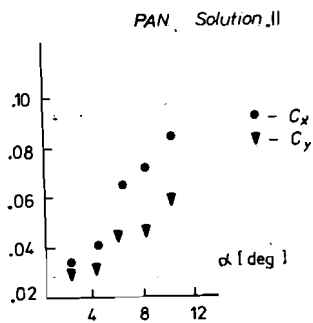


Рис.14

атаки течение отрывается на самой кромке. На верхней половине точка отрыва сдвигается в обратном направлении: от 85% при  $\alpha = 0^\circ$  до 14% при  $\alpha = 20^\circ$ . Аналогично, точки отрыва решения II сдвигаются от 15% относительно длины хорды при  $\alpha = 0^\circ$  до 8% в верхней и 50% в нижней половине при  $\alpha = 14^\circ$ .

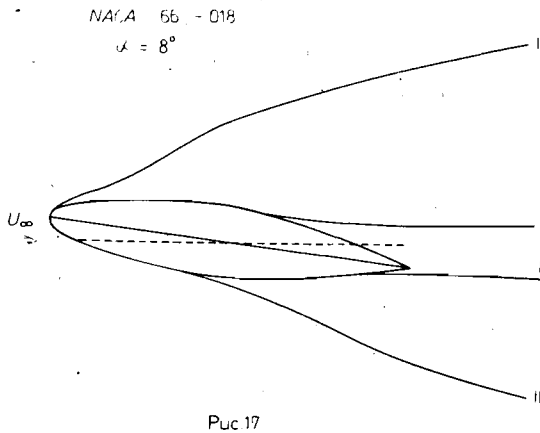
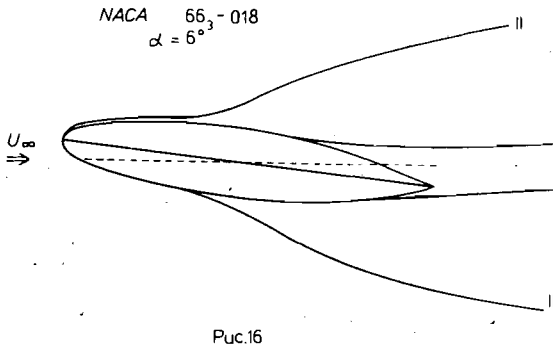
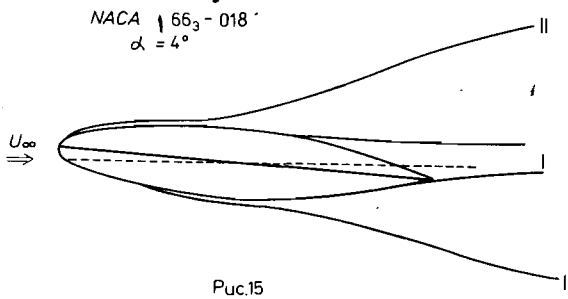
Решение II похоже на ламинарный отрыв пограничного слоя у передней кромки, наблюдаемый в эксперименте. Решение I похоже на течение, возникающее в результате отрыва повторно присоединенного после лами-

Угол атаки $\alpha$ (в градусах)	Точки отрыва решения I относительно средней линии (в %)		Точки отрыва решения II относительно средней линии (в %)	
	верхняя половина	нижняя половина	верхняя половина	нижняя половина
0	85	85	15	15
2	65	88	10	20
4	65	87	10	25
6	60	90	10	25
8	52	100	9	45
10	50	100	7	45
12	45	100	8	45
14	40	100	8	50
16	26	100		
18	22	100		
20	14	100		

нарного отрыва пограничного слоя. Повторное присоединение в эксперименте сопровождается резким повышением значения подъемной силы, в то время как полный отрыв от верхней половины профиля сопровождается уменьшением подъемной силы. Сказанное дает основание предположить, что при малых углах атаки (и докритических числах Рейнольдса) реализуется решение I.

При дальнейшем нарастании угла атаки течение перестраивается к решению II. Когда число Рейнольдса становится достаточно большим, пограничный слой турбулизуется и в результате наступает отрыв вблизи задней точки (решение I).

Общий характер решения соблюдается и для профиля *NACA 663-018*. На рис. 15, 16, 17 представлены границы застойных зон, соответствующих углам атаки  $\alpha = 2^\circ, 4^\circ, 10^\circ$ , а на рис. 18, 19, 20 — соответствующие поверхностные распределения давления в случае решения I. Что касается решения II, то качественный характер кривых давления ничем не отличается от соответствующего профилю *PAN* при  $\alpha = 12^\circ$ . Рассчитанные формы застойных зон сравнены с экспериментальными фотографиями [11] ламинарного отрыва и турбулентного отрыва повторно присоединенного пограничного слоя. Из этого сравнения видно, что решение I и экспериментально наблюдаемое течение при числах Рейнольдса  $Re = 4 \times 10^4$ , когда пограничный слой становится турбулентным и точка отрыва сдвигается вблизи задней кромки профиля, находятся в хорошем согласии между собой. Экспериментально скачок к отрыву у передней кромки происходит при  $\alpha = 8^\circ$ . На рис. 21 сделано еще одно сравнение с экспериментально наблюдаемыми точками ламинарного и турбулентного



отрыва при числах Рейнольдса  $Re = 8 \times 10^4$  и угле атаки  $\alpha = 12^\circ$  [12]. Оно еще раз демонстрирует удовлетворительное согласие между положением точек ламинарного и турбулентного отрыва и точек отрыва решений II и I соответственно. На рис. 22, 23 приведены рассчитанные значения коэффициентов сопротивления и подъемной силы, соответствующие решению I. Как видно, при числах Рейнольдса  $Re = 4 \times 10^4$  согласие с

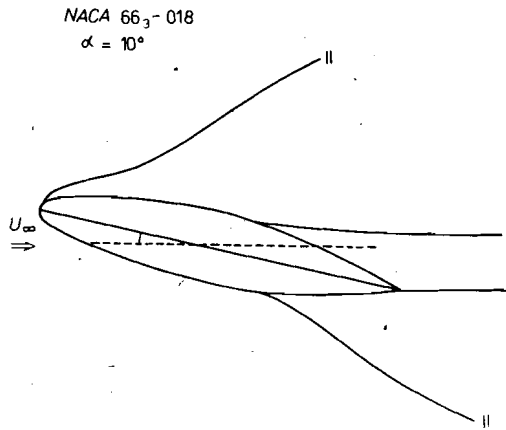


Рис.18

— Upper surface  
 - - - Lower surface

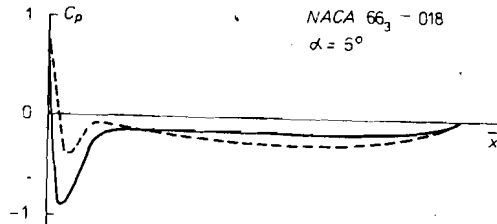


Рис.19

— Upper surface  
 - - - Lower surface

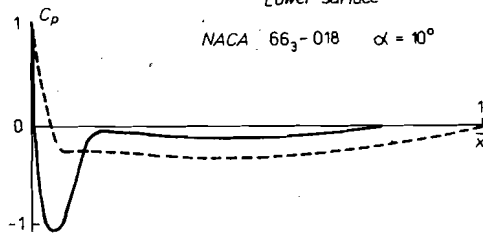


Рис. 20

экспериментально полученными значениями в [10] в интервале  $\alpha \in [0^\circ, 6^\circ]$  вполне удовлетворительно.

Точки отрыва решения I на нижней половине профиля с ростом угла атаки сдвигаются от 63% относительно длины хорды при  $\alpha = 0^\circ$  до 97% при  $\alpha = 8^\circ$  (табл. 5). Дальнейший рост угла атаки сопровождается отрывом на задней кромке профиля. Наоборот, сдвиг точек отрыва на верхней половине направлен обратно: от 63% при  $\alpha = 0^\circ$  до 50% при

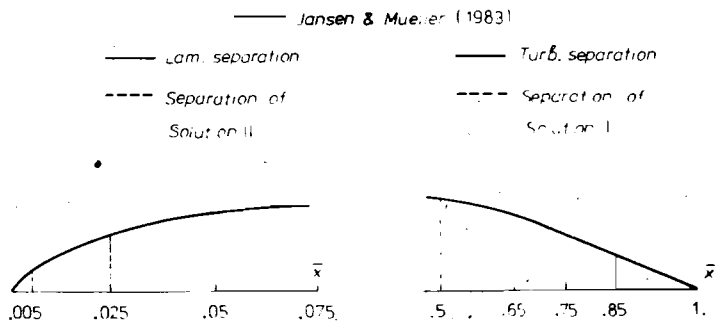


Рис. 21

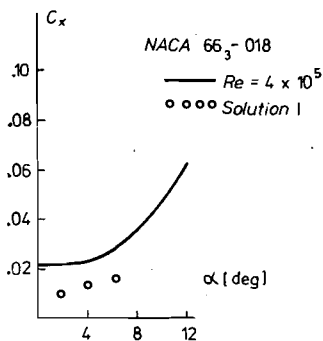


Рис. 22

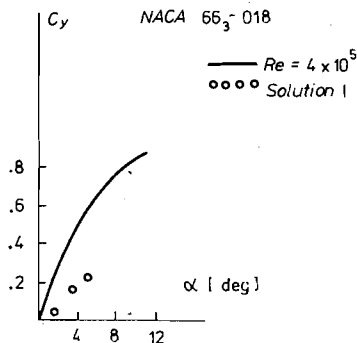


Рис. 23

$\alpha = 18^\circ$ . Точки отрыва решения II на нижней половине достигают 55% при  $\alpha = 12^\circ$ , а точка отрыва на верхней половине находится очень близко к передней кромке профиля — 0,5% — 2%.

На рис. 24-26 представлены рассчитанные формы застойной зоны (решение I), соответствующие профилю NACA 2418 при углах атаки  $\alpha = 2^\circ, 6^\circ, 10^\circ$ , а на рис. 27-29 — соответствующие кривые поверхностного давления. На рис. 28 дополнительно пунктиром показано экспериментально измеренное давление при угле атаки  $\alpha = 6^\circ$  и числе Рейнольдса  $Re = 2.7 \times 10^6$  [13]. На рис. 30 приведены значения поверхностного давления, соответствующие решению II при  $\alpha = 6^\circ$ . Кроме того, при  $\alpha = 6^\circ$  проведено исследование поведения решения II как функции параметра релаксации  $\tau_2$ . Хорошо видно, что при  $\tau_2 = 5 \times 10^{-3}$  и  $\tau_2 = 10^{-3}$  ошибка в расчете свободной границы варьирует в рамках ошибки аппроксимации и, следовательно, использование большего значения параметра вполне при-

NACA 2418

$\alpha = 4^\circ$

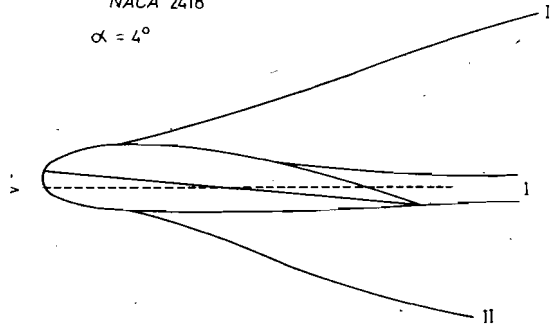


Рис. 24

—  $\tau_2 = 10^{-2}$   
- - -  $\tau_2 = 5 \times 10^{-3}$   
- - -  $\tau_2 = 10^{-3}$

NACA 2418

$\alpha = 6^\circ$

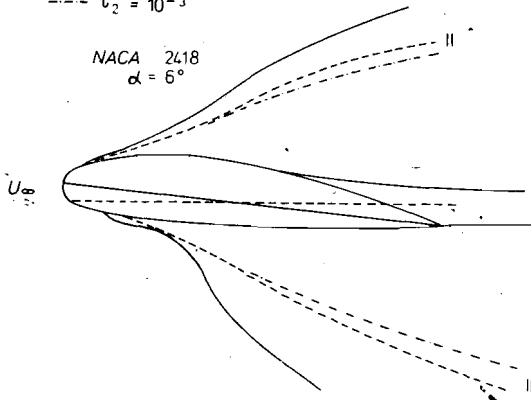


Рис. 25

NACA 2418

$\alpha = 10^\circ$

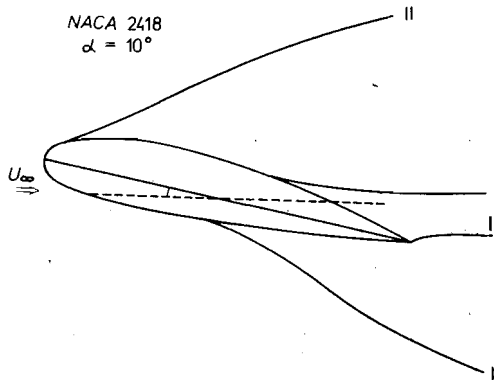


Рис. 26

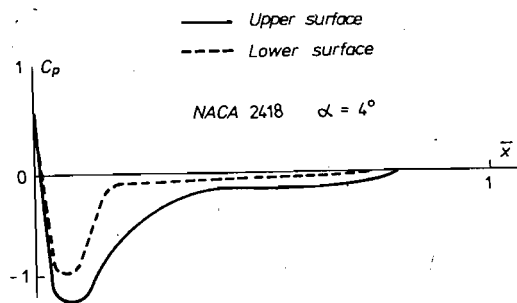


Рис. 27

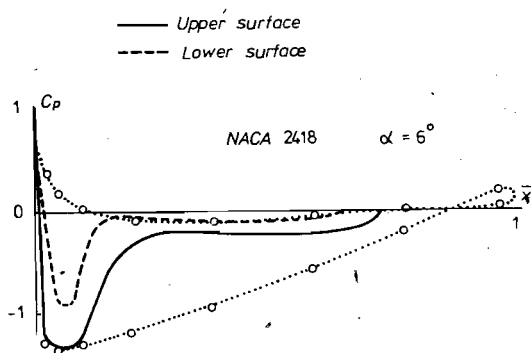
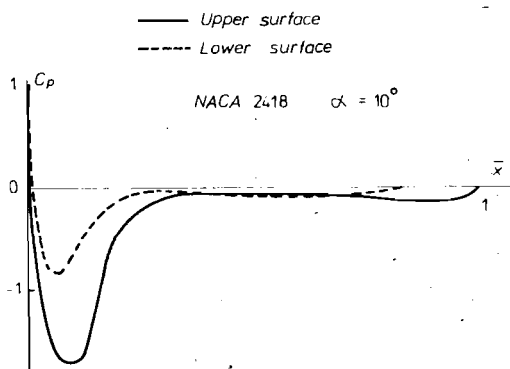


Рис 28



Угол атаки $\alpha$ (в градусах)	Точки отрыва решения I относительно средней линии (в %)		Точки отрыва решения II относительно средней линии (в %)	
	верхняя половина	нижняя половина	верхняя половина	нижняя половина
0	63	63	15	15
2	65	75	2	20
4	60	75	1.5	23
6	60	85	1	30
8	60	97	1	45
10	60	100	2	55
12	55	100	0.5	55
14	52	100		
16	55	100		
18	50	100		

емлемо. С другой стороны, значение  $\tau_2 = 10^{-2}$  в этом случае очевидно не является достаточно малым. Производит впечатление то, что в сравнении с профилем PAN здесь надо пользоваться более сильной релаксацией, что можно объяснить геометрическими особенностями данного профиля. Сравнение значений коэффициентов подъемной силы и сопротив-

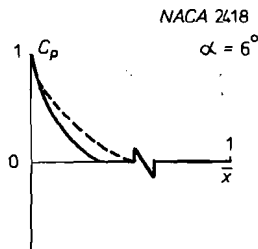


Рис. 30

ления, соответствующих решению I, с экспериментальными результатами [13] (рис. 31, 32) при числе Рейнольдса  $Re = 2.7 \times 10^6$  показывает, что настоящая модель дает значения для подъемной силы меньшие, чем экспериментальные, но зато аппроксимирует очень хорошо экспериментально измеренное сопротивление в диапазоне  $\alpha \in [0^\circ, 10^\circ]$ . Представленные на рис. 33 значения гидродинамических сил (сопротивление и подъемная сила) ясно указывают в пользу того, что когда отрыв происходит вблизи передней кромки (решение II), наблюдается резкое уменьшение подъемной силы. Этот факт наблюдается и в эксперименте. В то же время сопротивление, как и следовало ожидать, приблизительно в 3 раза больше, чем сопротивление, соответствующее решению I.

При угле атаки  $\alpha = 0^\circ$  точки отрыва на нижней половине расположены соответственно на 65% относительно длины хорды в случае решения I и

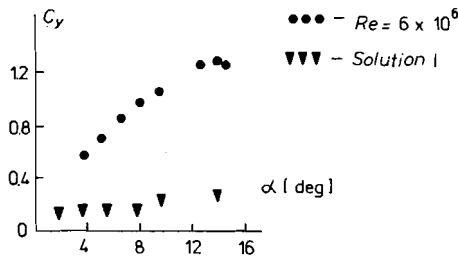


Рис. 31

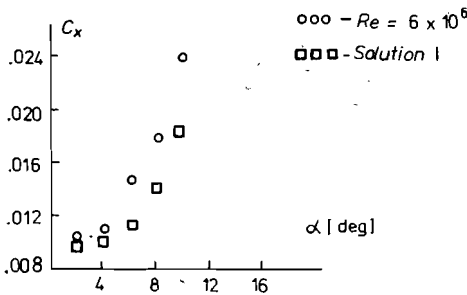


Рис. 32

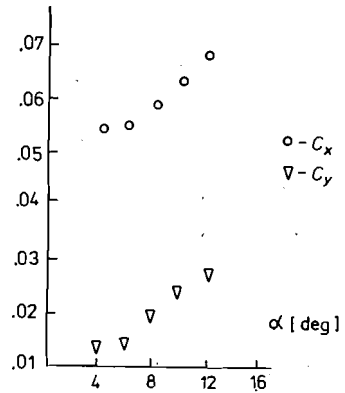


Рис. 33

на 15% — в случае решения II (табл. 6). С нарастанием угла  $\alpha$  точки отрыва сдвигаются к задней угловой точке профиля и при  $\alpha \geq 6^\circ$  решение I отрывается уже от угловой точки, а решение II достигает 42% при  $\alpha = 10^\circ$ . На верхней половине диапазон сдвига точек отрыва, соответствующих решениям I и II, от 60% и 23% при  $\alpha = 0^\circ$  до 47% при  $\alpha = 16^\circ$  в случае решения I и до 5% при  $\alpha = 10^\circ$  в случае решения II.

Полученные результаты показывают, что при углах атаки  $\alpha = 0^\circ \div 6^\circ$  (а в случае NACA 2418 и до  $10^\circ$ ) настоящая модель количественно

Угол атаки $\alpha$ (в градусах)	Точки отрыва решения I относительно хорды (в %)		Точки отрыва решения II относительно хорды (в %)	
	верхняя половина	нижняя половина	верхняя половина	нижняя половина
0	60	65	23	15
2	62	70	20	15
4	65	80	20	18
6	55	100	10	18
8	55	100	8	30
10	55	100	5	42
12	55	100		
14	47	100		
16	47	100		

очень хорошо согласуется с экспериментом по крайней мере с точки зрения оценки лобового сопротивления. Поскольку модель невязкая, то этот факт сам по себе приводит к значительной экономии машинного времени. Это дает нам основание утверждать, что подобный подход можно эффективным образом использовать для расчета характеристик отрывных течений вокруг двумерных профилей с угловой точкой (крыльевые профили), при этом с приемлимыми затратами машинных ресурсов.

Авторы выражают благодарность Министерству культуры, науки и просвещения Болгарской Народной Республики за поддержку настоящей работы (Договор 1052/1988 г. ).

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А р ж а н и к о в, Н. С., В. Н. М а л ь ц е в. Аэродинамика. Оборонгиз, М., 1956.
2. Л о й ц я н с к и й, Л. Г. Механика жидкости и газа. М., Наука, 1987.
3. C h r i s t o v, С., М. Т о д о р о в. Numerical investigation of separated or cavitating inviscid flows. — In: Intern. Confer. on Numer. Methods and Appl., Sofia, 27.8-2.9. 1984, 216-223.
4. C h r i s t o v, С., М. Т о д о р о в. On the determination of the shape of stagnation zone in separated inviscid flows around blunt bodies. — In: Proc. XVth Jubilee Session on Ship Hydrodynamics, Varna, 6-11.10. 1986, 2a, paper No 10.
5. C h r i s t o v, С., М. Т о д о р о в. An inviscid model of flow separation around blunt bodies. — Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci., 7, 1987, 43-46.
6. Б и р к г о ф, Г. Гидродинамика. М., Иностран. лит., 1963.
7. В а р с а м о в, К., И. Н е д я л к о в, П. П е т р о в а, В. Х а д ж и м и х а л е в. Върху една екстремална задача за профил с минимално съпротивление и зададена подъемна сила. — Год. ВТУЗ, XVIII, кн. 2 — техническа физика, 1981, 209-222.

8. П о п о в, М., Л. П а н о в. Хидро- и газодинамика. С., Техника, 1980.
9. A b o t t, I. E., A. E. D o e n h o f f. Theory of wing sections. Dover Publications, inc, N. Y., 1959.
10. Я н е н к о, Н. Н. Метод дробных шагов. Новосибирск, Наука, 1967.
11. M u e l l e r, T. J., S. M. B a t i l l. Experimental studies of separation on two-dimensional airfoils of low Reynolds numbers. — AIAA Journal, 20, 1982, No 4, 457-463.
12. J a n s e n, B. J., T. J. M u e l l e r. Experimental studies of the boundary layer on an airfoils at low Reynolds numbers. — In: AIAA Fl. and Plasma Dyn. Conf., Danver, Massachusetts, July 12-14, 1983.
13. R i e g e l s, F. Aerodynamische Profile. R. Oldenbourg, München, 1958.

*Поступила 14. IV. 1989 г.*