

Академия наук СССР Сибирское отделение  
Вычислительный центр  
Институт теоретической и прикладной механики

**МОДЕЛИРОВАНИЕ В МЕХАНИКЕ**

Том 3 (20)

№1

*Сборник научных трудов*



**ОТТИСК**



Новосибирск 1989г.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЖИМА ТИПА  
ТОЧЕЧНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ В ПЛОСКОМ СЛОЕ СМЕШЕНИЯ

В.П.Нартов, Х.И.Христов

Решение уравнений Навье-Стокса в предположении медленного изменения структуры течения в продольном направлении отыскивается в классе точечных случайных функций. На основе полученного решения рассчитываются турбулентные характеристики плоского слоя смешения, которые сравниваются с данными лабораторных экспериментов.

Одним из центральных и пока наименее изученных (несмотря на большое число публикаций) вопросов теории динамических систем является неустойчивость и возникновение стохастических режимов. В гидродинамике такое явление называется турбулентностью. Получение количественных результатов для случайных решений уравнений гидродинамики остается очень сложной задачей, которая может быть решена только приближенно. После того, как Келлер и Фридман /1/ предложили бесконечную иерархическую (каскадную) систему для многоточечных моментов, основной поток публикаций был посвящен проблеме замыкания различных конечномерных версий этой системы. Как правило, вводились дополнительные связи моментов (кумулянтов) высшего порядка с комбинациями моментов (кумулянтов) низшего порядка. Такие подходы называются иерархическими /2/, и неудачи, связанные с ними, хорошо известны. В частности, квазинормальное приближение Миллионщикова /3/ приводит к отрицательной спектральной плотности энергии /4/.

Совершенно другой путь, связанный с применением функциональных рядов с гауссовским белым шумом в качестве базисной функции, был предложен Винером /5/. Эти ряды известны сегодня как ряды Винера-Эрмита.

Несмотря на бесспорные успехи в применении к задачам идентификации линейных систем (см./6/), метод Винера-Эрмита встречает большие трудности в нелинейных системах, поскольку у гауссовского белого шума кумулянты нечетного порядка равняются нулю, и урезанные версии иерархической системы не аппроксимируют адекватно нелинейность исходной задачи. Последнее приводит к необходимости ренормализации (см./7/), которая неоднозначна.

Несмотря на недостатки, метод Винера наметил корректный подход к стохастическим системам, естественным развитием которого может быть включение как можно большего количества информации о свойствах системы в базисную функцию. Отура /8/ заменил гауссовский белый шум пуассоновским процессом, но ограничился только общей теорией, назвав соответствующее разложение рядом Пуассона-Винера. Особое место пуассоновской и более общих точечных случайных функций в аппроксимации решений нелинейных стохастических систем впервые вскрыто в работах /9/, /10/ на примере Бюргерсовой турбулентности. Техника применения метода Пуассона-Винера к нелинейным системам детально развита в /11/, где предложена процедура получения иерархической системы для ядер функционального ряда.

Метод функциональных рядов развивался далее для более сложных точечных базисных функций /12/-/16/ применительно к стохастическим, задачам механики гетерогенных континуумов, и соответствующие ряды назывались рядами Вольтерра-Винера, поскольку для неслучайных функций функциональные ряды были впервые предложены Вольтерра /17/. Вириальность ряда Вольтерра-Винера с точечной базисной функцией позволила получить асимптотически строгие результаты с точностью до соответствующей степени концентрации дисперсной фазы (которая всегда меньше единицы).

В случае стохастически нелинейных систем аппроксимация решения точечной случайной функцией имеет уже эвристический характер, так как в исходных уравнениях отсутствуют случайные коэффициенты типа точечных случайных функций (как в гетерогенных средах), которые определяли бы точечный тип решения. Физический смысл такой аппроксимации состоит в том, что движение предполагается состоящим из одинаковых событий (структур), которые разбросаны случайно по пространству и по времени. Случайные процессы такого типа называются случайными потоками /18/. Наличие неслучайных по форме структур в турбулентных потоках является

твердо установленным экспериментальным фактом, и, более того, установлено, что существенная часть турбулентных напряжений обусловлена, собственно, структурами /19/, /20/. Поэтому представляется важной попытка нахождения точечных случайных функций, приближенно удовлетворяющих уравнениям Навье-Стокса.

Постановка задачи о нахождении решения типа точечной случайной функции для плоского течения Пуазейля предложена впервые в /21/, где из уравнений Навье-Стокса получена система для первых двух ядер функционального ряда. Авторами настоящей работы делались попытки найти решение для первого ядра в предположении двумерности структур, но эти попытки не увенчались успехом, что может указывать на отсутствие в плоском течении Пуазейля двумерных полей пульсаций скорости. Далее (см. /22/, /23/, /24/) авторы применили принцип минимальной диссипации /25/ для плоского и осесимметричного течений Пуазейля и отыскивали минимум функционала диссипации в классе точечных случайных функций с учетом ограничений - уравнений Рейнольдса и неразрывности. Результаты были получены в двумерной постановке, и рассчитанные характеристики стохастического режима качественно или количественно соответствовали реальным характеристикам турбулентности. Согласование с экспериментом можно сделать количественно очень хорошим, вводя поправочные коэффициенты, эффективно учитывающие трехмерность, и накладывая еще одно естественное ограничение - равенство порождения и диссипации /26/.

Несмотря на важное значение результатов работ /22/, /23/, /24/, в которых впервые находились точечные случайные решения и получено теоретическое объяснение существования когерентных структур, поставленная там задача имеет несколько модельный характер из-за двумерности рассматриваемых пульсаций. Известно, что появления двумерных возмущений следует ожидать преимущественно в течениях с точкой перегиба на профиле средней скорости. Классическим примером такого течения является так называемый слой смешения, возникающий на границе соприкосновения двух спутных потоков вязкой жидкости, движущихся с разными скоростями. Остановимся на этом течении, поскольку для него известны хорошие количественные экспериментальные данные (в том числе /27/), с одной стороны, и развитые теоретические подходы, основанные на системах вихрей (см. /28/), - с другой. Обзор теоретических и экспериментальных

работ можно найти в /29/. Метод аппроксимации точечной функцией для слоя смешения впервые применялся авторами в /30/, /31/, где предложены автомоделльные переменные, в предположении медленного изменения структуры течения в направлении течения.

Автомоделльность течений со слабым изменением величин в продольном направлении

Течение в слое смешения (так же как в пограничном слое и в следе) неоднородно в продольном направлении, что исключает возможность прямого применения точечной случайной функции для аппроксимации режима течения. С другой стороны, понятно, что зависимость от продольной координаты  $x$  (см. рис. 1) двойка: "медленная" зависимость масштабов от координаты  $x_0(t)$  центра когерентной структуры и "быстрая" (локальная) зависимость. Такой взгляд есть не что иное как гипотеза Кармана (см. /32/) о локальной автомоделльности турбулентных течений.

Рассмотрим двумерное течение и введем функцию тока, для которой система Навье-Стокса принимает вид

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} = \nu \Delta \Delta \psi. \quad (1)$$

Разбивая  $\psi = \langle \psi \rangle + \psi'$  на осредненную  $\langle \psi \rangle$  и пульсационную  $\psi'$  составляющие, из (1), получим:

$$\frac{\partial \Delta \langle \psi \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \psi \rangle}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \langle \psi \rangle}{\partial x} - \frac{\partial \langle \psi \rangle}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \langle \psi \rangle}{\partial y} = \nu \Delta \Delta \langle \psi \rangle - \left\langle \frac{\partial \psi'}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial x} - \frac{\partial \psi'}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial y} \right\rangle, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Delta \psi'}{\partial t} + \left( \frac{\partial \langle \psi \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \psi'}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial x} + \frac{\partial \psi'}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \langle \psi \rangle}{\partial x} - \left( \frac{\partial \langle \psi \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial y} - \frac{\partial \psi'}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \langle \psi \rangle}{\partial y} = \nu \Delta \Delta \psi' + \left\langle \frac{\partial \psi'}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial x} - \frac{\partial \psi'}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial y} \right\rangle. \quad (3)$$

Предположение о локальной автомоделльности позволяет искать решение для  $\langle \psi \rangle$  и  $\psi'$  в виде

$$\langle \psi \rangle = U_1 f(x_0) F(\eta), \quad \psi'(x, y, t) = U_1 h(x_0) Q(\xi, \eta, \tau), \quad (4)$$

где локальные координаты и безразмерное время  $\tau$  определяются формулами

$$x = x_0 + \xi \cdot f(x_0), y = \eta \cdot f(x_0), t = U_1^{-1} g(x_0) \tau, \quad (5)$$

а  $f, g$  и  $h$  имеют размерность длины. Производными по глобальным переменным будем пренебрегать по сравнению с производными по локальным переменным. Тогда

$$\frac{\partial \Psi'}{\partial x} \approx \frac{U_1 h}{f} \frac{\partial Q}{\partial \xi}, \frac{\partial \Psi'}{\partial y} = \frac{U_1 h}{f} \frac{\partial Q}{\partial \eta}, \Delta \Psi' \approx \frac{U_1 h}{f^2} \Delta Q, \\ \Delta \Delta \Psi' \approx \frac{U_1 h}{f^4} \Delta \Delta Q, \frac{\partial \Delta \Psi'}{\partial x^2} \approx \frac{U_1 h}{f^3} \frac{\partial \Delta Q}{\partial \xi}, \frac{\partial \Delta \Psi'}{\partial y^2} \approx \frac{U_1 h}{f^3} \frac{\partial \Delta Q}{\partial \eta}. \quad (6)$$

Более сложным оказывается выражение для производной по времени:

$$\frac{\partial \Delta \Psi'}{\partial t} = \frac{U_1^2 h}{f^2 g} \frac{\partial \Delta Q}{\partial \tau} + \frac{\dot{x}_0 U_1 h f'}{f^3} \left\{ \frac{h f' - 2 f' h \Delta Q}{h f'} - \frac{\xi \partial \Delta Q}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial \Delta Q}{\partial \eta} - \tau \frac{\partial \Delta Q}{\partial \tau} \frac{g f'}{g f} \right\} - \frac{\dot{x}_0 h U_1}{f^3} \frac{\partial \Delta Q}{\partial \xi}. \quad (7)$$

Чтобы избежать наличия секулярного члена, положим  $g' = 0$ . Тогда единственной комбинацией, имеющей размерность длины и не включающей расстояние  $x_0$ , будет  $g = \nu U_1^{-1}$ .

После подстановки (4)-(6) в (2) последнее принимает вид

$$-\frac{f'}{f} [F F'' + F F'''] + \frac{h^2}{f^4} S' = \frac{\nu}{f^3 U_1} F^{IV}, \quad (8)$$

где

$$S' = \left\langle \frac{\partial Q}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \Delta Q}{\partial \xi} - \frac{\partial Q}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \Delta Q}{\partial \eta} \right\rangle. \quad (9)$$

Из (8) получаем, что для существования автомодельного решения необходимо, чтобы выполнялось

$$f = \left( \frac{2\nu x_0}{U_1} \right)^{1/2}, h = \left( \frac{2\nu^3 x_0}{U_1^3} \right)^{1/4}. \quad (10)$$

Соответственно число Рейнольдса и безразмерная скорость структуры  $S$  определяются выражениями

$$Re = U_1 h / \nu = (2U_1 x_0 / \nu)^{1/4}, C = \dot{x}_0 U_1^{-1}. \quad (11)$$

Нетрудно видеть, что отношение членов в скобках в (7) к последнему члену в правой части (7) есть величина порядка  $O(Re^{-2})$  или  $O(x^{-1/2})$ . Однако в предположении больших чисел Рейнольдса нельзя пренебрегать всеми членами в скобках, поскольку рассматривается неограниченная область, а  $\xi, \eta$  входят в явном виде. Более последовательным упрощением будет

$$\frac{\partial \Delta \Psi'}{\partial t} \approx \frac{U_1^3 h}{\nu f^2} \frac{\partial \Delta Q}{\partial \tau} - C \frac{U_1^2 h f'}{f^3} \left( \xi \frac{\partial \Delta Q}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \Delta Q}{\partial \eta} \right) - C U_1^2 \frac{h}{f^3} \frac{\partial \Delta Q}{\partial \xi}, \quad (12)$$

и для  $Q$  получается следующее уравнение

$$Re^3 \frac{\partial \Delta Q}{\partial \tau} - C \left( \xi \frac{\partial \Delta Q}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \Delta Q}{\partial \eta} \right) - C Re \frac{\partial \Delta Q}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} \frac{\partial \Delta Q}{\partial \xi} - \frac{\partial Q}{\partial \xi} \frac{\partial \Delta Q}{\partial \eta} + Re \left( \frac{dF}{d\eta} \frac{\partial \Delta Q}{\partial \xi} - \frac{d^3 F}{d\eta^3} \frac{\partial Q}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{Re} \Delta \Delta G, \quad (13)$$

которое вместе с (8), (9) дает замкнутую систему для пульсационного и осредненного движения.

Решение типа точечной случайной функции для автомодельных уравнений

Рассмотрим случайную функцию плотности

$$\mathcal{P}(x) = \sum \delta(x - x_\alpha), \quad (14)$$

где  $\delta(\cdot)$  - дельта-функция Дирака. Любая другая точечная случайная функция получается линейным преобразованием  $\mathcal{P}$

$$Q(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi - \beta; \eta) \cdot (\mathcal{P}(\beta) - \gamma) d\beta, \quad (15)$$

где  $\gamma \equiv \langle \mathcal{P}(x) \rangle$  есть среднее число случайных точек на единице длины.

Корреляционные свойства точечной случайной функции полностью определяются многоточечным распределением вероятности для порождающей системы случайных точек  $\{x_\alpha\}$  (см. /33/, /34/). Если точки статистически независимы, то функция  $\mathcal{P}(x)$  оказывается пуассоновской случайной функцией плотности и ее кумулянты являются многомерными дельта-функциями /34/. В частности, для первых трех моментов имеем

$$\langle \mathcal{P}(x) \rangle = \gamma, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \langle \Psi(x_1)\Psi(x_2) \rangle &= \delta\delta(x_1-x_2) + \gamma^2, \\ \langle \Psi(x_1)\Psi(x_2)\Psi(x_3) \rangle &= \delta\delta(x_1-x_2) \cdot \delta(x_1-x_3) + \\ &+ 3\gamma^2\{\delta(x_1-x_3)\}_s + \gamma^3, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\{\cdot\}_s$  означает операцию симметризации по всем нетривиальным комбинациям аргументов. Для более общих точечных функций теория развита в /13/ и /35/.

В настоящей работе будем ограничиваться отысканием решения в виде (16). Это означает, что одинаковые (в автомодельных переменных) структуры, форма которых определяется неслучайной функцией, расположены в случайных точках абсциссы  $0 \leq \xi$ . Тогда, учитывая (17), можно получить, что

$$S' = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial K}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \Delta K}{\partial \xi} - \frac{\partial K}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \Delta K}{\partial \eta} \right) d\xi. \quad (18)$$

Подставляя это выражение в (8) и интегрируя по  $\eta$ , получим

$$-FF'' - \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial K}{\partial \xi} \Delta K d\xi = F'''. \quad (19)$$

Граничное условие для  $F$  имеет вид

$$F(0) = 0. \quad (20)$$

Остальные условия отражают асимптотическое поведение профиля скорости  $U \equiv F'$  на бесконечности

$$U(-\infty) = 1, \quad U(+\infty) = U_2/U_1. \quad (21)$$

Уравнение для ядра  $K$  получается по общей схеме идентификации ядер, предложенной в /11/. В рассматриваемой задаче надо умножить (13) на  $[\Psi(\theta) - \delta]$  и осреднить это уравнение по ансамблю. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \text{Re} \frac{\partial \Delta K}{\partial \tau} + \left[ \text{Re} \frac{\partial F}{\partial \eta} - c \text{Re} + \frac{\partial K}{\partial \eta} - \frac{c\xi}{\text{Re}} \right] \cdot \frac{\partial \Delta K}{\partial \xi} - \left[ \frac{\partial K}{\partial \xi} + \frac{c\eta}{\text{Re}} \right] \frac{\partial \Delta K}{\partial \eta} - \\ - \text{Re} \frac{\partial^3 F}{\partial \eta^3} \cdot \frac{\partial K}{\partial \xi} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \Delta K. \end{aligned} \quad (22)$$

Граничными условиями для  $K$  являются условие затухания

$$K \rightarrow 0, \quad \Delta K \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow \pm \infty, \quad (23)$$

и условие конечности энергии пульсаций, которое для точечной функции принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left( \frac{\partial K}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial K}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\xi < \infty. \quad (24)$$

Это условие в предположении гладкости функций заменяется тоже условием затухания

$$K \rightarrow 0, \quad \Delta K \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow \pm \infty. \quad (25)$$

Уравнения (19) и (22) дают замкнутую систему для  $F$  и  $K$ . Имея ее решение, можно получить все моменты функции  $Q$ , а следовательно, и  $\Psi'$  (см. /11/ и остальные работы авторов).

В том числе:

$$\mathcal{E}_{uu}^{(2)} \equiv \langle u'(\frac{x}{F}, y) u'(\frac{x+\Delta x}{F}, y) \rangle = \frac{\gamma U_1^2}{\text{Re}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial K}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial K}{\partial \xi} (\frac{\xi}{F} + \frac{\Delta x}{F}, \eta) d\xi, \quad (26)$$

$$\mathcal{E}_{vv}^{(2)} \equiv \langle v'(\frac{x}{F}, y) v'(\frac{x+\Delta x}{F}, y) \rangle = \frac{\gamma U_1^2}{\text{Re}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial K}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial K}{\partial \xi} (\frac{\xi}{F} + \frac{\Delta x}{F}, \eta) d\xi, \quad (27)$$

$$\langle u'^2 \rangle = \mathcal{E}_{uu}^{(2)}(0, y), \quad R_{uu} = \mathcal{E}_{uu}^{(2)}(\frac{\Delta x}{F}, y) / \mathcal{E}_{uu}^{(2)}(0, y), \quad (28)$$

$$\langle v'^2 \rangle = \mathcal{E}_{vv}^{(2)}(0, y), \quad R_{vv} = \mathcal{E}_{vv}^{(2)}(\frac{\Delta x}{F}, y) / \mathcal{E}_{vv}^{(2)}(0, y). \quad (29)$$

Аналогично определяется  $R_{uv}$  через  $\mathcal{E}_{uv}^{(2)}$  и т.д.

Соответственно, для высших центрированных моментов имеем

$$\langle u'^3 \rangle = \gamma \frac{U_1^3}{\text{Re}^3} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial K}{\partial \eta} \right)^3 d\xi, \quad (30)$$

$$\langle u'^4 \rangle - 3\langle u'^2 \rangle^2 = \gamma \frac{U_1^4}{\text{Re}^4} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial K}{\partial \eta} \right)^4 d\xi. \quad (31)$$

Последние две величины называются асимметрией и эксцессом. Настоящий подход позволяет выписать их даже для разных значений продольной координаты, но экспериментальные данные по многоточечным коэффициентам асимметрии или эксцесса отсутствуют. Важно отметить что аппроксимация точечной случайной функцией дает приближенное, но замкнутое описание стохастического режима.

Разностная схема и алгоритм численного решения граничной задачи для ядер

Разностная схема в основном соответствует разработанной ранее авторами /22/, /23/ для стохастических режимов в течении Пуазейля. Детальное описание алгоритма рассматриваемой задачи можно найти в /29/. Здесь ограничимся описанием основных особенностей схемы.

Используются новые координаты  $\xi, \eta$ , связанные с  $x, y$  и  $\eta$  формулами

$$\xi = S_x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} G\right), \quad \eta = S_y \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} Z\right). \quad (32)$$

где константы  $S_x, S_y$  подбираются в соответствии с характерными размерами искомой структуры.

Вводится функция завихренности

$$\Delta K = -\omega, \quad (33)$$

и (22) распадается на два уравнения. Ищется стационарное решение системы, а в (32) добавляется фиктивное время, и оно решается методом дробных шагов до установления на каждом шаге по "внешнему" времени  $\tau$ . Так получается очередная итерация для  $K$ , после чего решается уравнение (19), которое разбивается на два уравнения введением  $u = F'$ .

Следует подчеркнуть, что рассматриваемая задача является нелинейной задачей на собственные значения, и значение собственного параметра  $C$  определяется итерационно так, чтобы выбранный центр вихревой структуры оставался в центре координатной системы. Интересно отметить, что рассчитанное значение  $C$  со схемной точностью совпадает с  $(U_1 + U_2)/2$ . Это согласуется с известными экспериментальными данными.

## Результаты и сравнение с экспериментом

В настоящем подходе осталась одна произвольная величина - среднее число структур на единице длины  $\chi$ , поэтому для сравнения с экспериментом необходимо выбрать его значение из того же эксперимента. В /27/ наблюдались два разных типа структур: структура I и структура II, которая является результатом спаривания двух структур типа I. Поэтому в настоящей работе мы будем рассматривать случай  $\chi = 0,035$ , соответствующий структуре I. Значение  $\chi$  получается следующим образом. Размер структуры I примерно 3,4 см при  $f = \sqrt{2} \sqrt{x_0/U_1} = 0,2425$ , что дает в локальных безразмерных координатах величину порядка 14, т.е. число структур на безразмерной единице длины, примерно,  $\chi = 0,07$ . Однако, изучая эксперименты Хуссейна и Замана /38/, можно сделать вывод, что структура состоит не из одного, а из двух вихрей. Становясь на эту точку зрения, необходимо сделать значение  $\chi$  в два раза меньшим:  $\chi = 0,035$ . Действительно, рассчитанная единичная структура полной завихренности (см.рис.2) состоит из двух вихрей одинакового знака. "Чистая" же пульсационная структура состоит из трех вихрей, центральный из которых имеет знак обратный по отношению к средней завихренности (см.рис.3). Следует заметить, что, поскольку структуры могут случайным образом оказываться ближе (или дальше) расстояния  $\chi^{-1}$ , то появление в эксперименте /27/ "двуглазой" структуры вполне можно объяснить комбинацией левого и правого вихрей двух последующих структур. Следует отметить, что структура на рисунке 2 качественно согласуется с полученной методом распознавания образом в эксперименте /27/, однако максимальные значения полной завихренности меньше в 1,5 раза. Лучшее согласование получается со структурой из эксперимента /37/, где значения максимумов практически совпадают. Такое согласование характеристик указывает на применимость структурного подхода.

Для точечного случайного решения можно рассчитать различные средние характеристики. Они представлены на последующих рисунках после нормировки независимых переменных толщиной потери импульса

$$\theta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{4} - \left( \frac{U(y) - \frac{1}{2}(U_1 + U_2)}{U_1 - U_2} \right)^2 \right] dy. \quad (34)$$

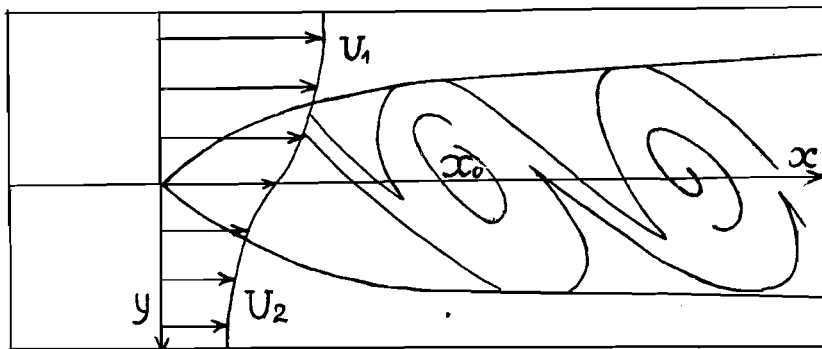


Рис. 1

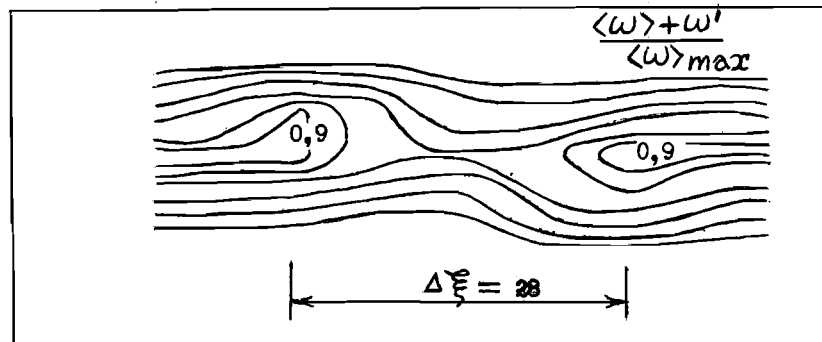


Рис. 2

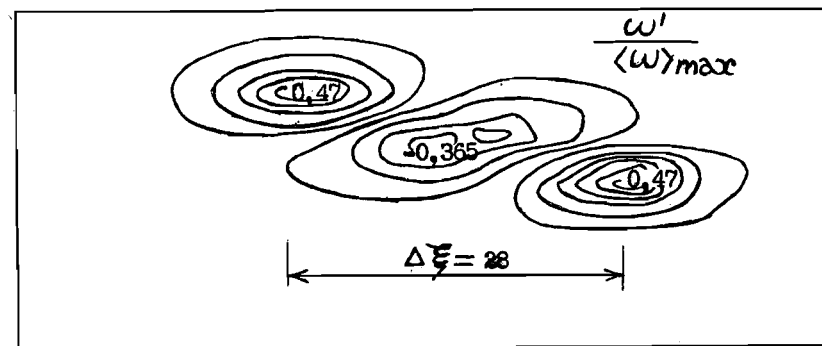


Рис. 3

Хорошим, как и во многих других расчетах, оказалось предсказание средней скорости  $U(y)$ , которое показано на рис.4. На рис.4 приведено сравнение автомоделного профиля реинольдсова напряжения, которое, также как и профиль  $\sqrt{\langle u_x'^2 \rangle}$ , хорошо согласуется с экспериментом /29/. Интенсивность  $\sqrt{\langle u_y'^2 \rangle}$  несколько меньше экспериментальной /29/.

Как отмечалось выше, расчет ядра  $K$  дает полное описание точечной случайной функции, поскольку свойства случайной функции  $\varphi$  из (15) заданы. В отличие от всех полуэмпирических теорий здесь имеется возможность рассчитать не только одноточечные осредненные величины, но и многоточечные моменты, корреляции и т.п. На рис.5 показаны корреляционный коэффициент  $R_{uu}$ , рассчитанный по формуле (28), который сравнивается с полученным в эксперименте /38/ методом фазового осреднения. Качественное согласование хорошее. Зная  $R_{uu}$ , можно вычислить соответствующую плотность спектра энергии  $E_{uu}$  с помощью преобразования Фурье. На рис.6 показано сравнение этой величины с экспериментальной /20/. Согласование в низкочастотной области хорошее, а рассогласование в высокочастотной области можно отнести за счет трехмерных составляющих пульсаций, которые наблюдаются в эксперименте, но в принципе не учитываются в модели.

По формулам (30) и (31) рассчитываются асимметрия и эксцесс, показанные соответственно на рис.7 и 8. Они качественно согласуются со средними по времени из эксперимента /39/. Обе величины указывают на значительное отклонение от соответствующих гауссовских характеристик.

#### Заключение

Для турбулентного слоя смешения приближение точечной случайной функцией оказалось вполне адекватным и позволило с хорошей точностью предсказать автомоделные характеристики турбулентности. Единственным эмпирическим параметром является число структур на единице длины  $\chi$ . Хорошее согласование с экспериментом объясняется тем фактом, что даже и для больших сверхкритических значений  $Re$  первичные структуры сохраняют свою форму, а вторичные и др. имеют небольшое влияние на значения осредненных характеристик. В этом смысле настоящая работа является теоретическим объяс-

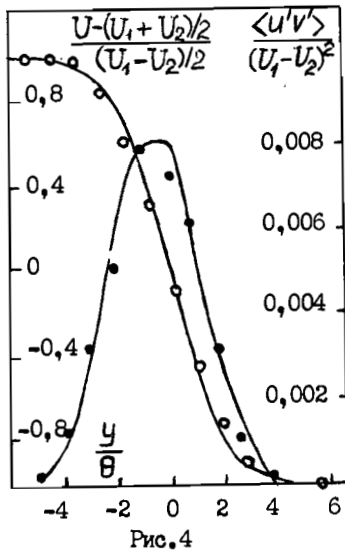


Рис.4

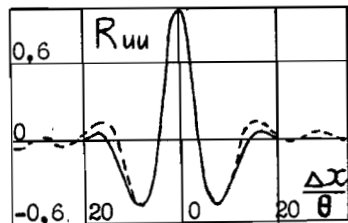


Рис.5

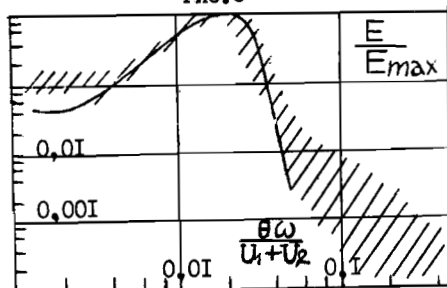


Рис.6

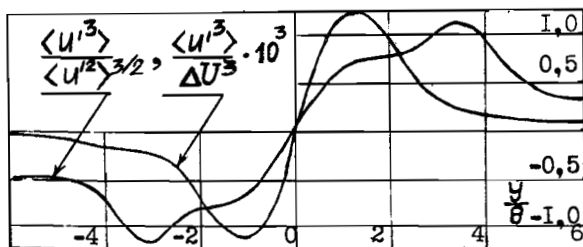


Рис.7

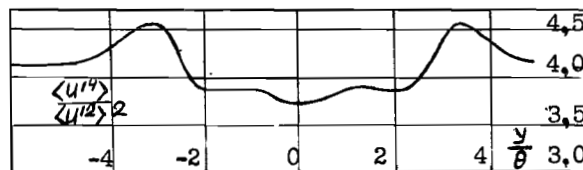


Рис.8

нением экспериментального факта, констатирующего существенный вклад в осредненные характеристики крупномасштабных вихревых структур.

1. Keller L.V., Friedman D.D. Differentialgleichung für turbulente bevegung einer kompressiblem flüssigkeit//Proc.1 st Intern.Cong.Appl. Mech., Delph. - Delph., 1924. - P. 395-405.
2. Richardson J.M. Application of truncated hierarchy techniques //Proc. of appl. math. Amer. math. soc. - Providence, 1964.
3. Миллионщиков М.Д. К теории однородной изотропной турбулентности//Докл. АН СССР. - 1941. - т.32. - С.611-614, 615-618.
4. Ogura Y. A consequence of zero-forth-cumulant approximation in the decay of isotropic turbulence//J. Fluid Mech. - 1963. - v.16. - P.33-49.
5. Винер Н. Нелинейные волны в теории случайных процессов. - М.: ИЛ, 1961.
6. The Volterra and Wiener theories of nonlinear systems. - New-York: John Wiley, 1980.
7. Meecham W.C. Renormalisation for the Wiener-Hermite representation of statistical turbulence//Turb. diffus. environ. poll. (adv. Geophys.). - 1974. - v.18a. - P.445-455.
8. Ogura H. Orthogonal functionals of the Poisson process//IEEE. Trans. Inf. Theory. - 1972. - v.18. - P.473-481.
9. Христов Хр. Об одном стационарном случайном процессе типа "белого шума" со специальными свойствами/ТММ. - 1979. - год X. - № I. - С.53-57.
10. Христов Хр. Об одном каноническом разложении случайных процессов и его применении к турбулентности/ТММ. - 1980. - год XI. - № I. - С.59-66.
11. Christov C.I. Poisson-Wiener expansion in nonlinear stochastic systems//Ann. de l'Univ. de Sofia, Fac. Math. Mech., Livre 2-Mecanique. - 1985. - tome 75/1981. - P.143-165.
12. Christov C.I. Determination of the interaction between the particulate and continuous phase in an emulsion via stochastic functional expansion//Ann. de l'Univ. Sofia, Fac. Math. Mec., Livre 2-Mecanique. - tome 77/1983.

13. Christov C.I. A further development of the concept of random density function with application to Volterra-Wiener expansions // Compt. Rend. de l'Acad. Bulg. des sciences. - 1985. - tome 38. - N 1. - P. 35-38.
14. Christov C.I. Towards a statistical theory of emulsions // Proc. 13 Spring Conf. Union Bulg. Math. sunny beach, april 6-9, 1984. - Sofia, 1984. - P. 473-481.
15. Christov C.I., Markov K.Z. Stochastic functional expansion for random media with perfectly disordered constitution // SIAM J. appl. math. - 1985. - v. 45. - N 2. - P. 289-311.
16. Christov C.I., Marcov K.Z. Stochastic functional expansion in elasticity of heterogeneous solids // Int. J. solids and structures. - 1985. - v. 21. - N 12. - P. 1197-1211.
17. Вольтерра В. Теория функционалов, интегралов и интегральных дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1982.
18. Большаков И.А., Ракошиц В.С. Прикладная теория случайных потоков. - М.: Советское радио, 1978.
19. Hussein A.K.M.F. Coherent structures... // Phys. Fluids. - 1983. - v. 26. - N 10. - P. 2816-2850.
20. Browand F.K., Ho C.M. The mixing layer: an example... // J. mech. theort. appl. - 1983. - N 2. - P. 99-120.
21. Christov C.I. A method for treating the stochastic bifurcation of plane poiseuille flow // Ann. de l'Univ. de Sofia, Fac. Math. Mech., Livre 2-Mecanique. - tome 76/1982.
22. Христов Х.И., Нартов В.П. Бифуркация и появление стохастического решения в одной вариационной задаче, связанной с плоским течением Пуазейля // ДАН СССР. - 1984. - т. 277. - № 4. С. 825-828.
23. Христов Х.И., Нартов В.П. Бифуркация и появление стохастического решения в одной вариационной задаче, связанной с плоским течением Пуазейля // Численное моделирование в динамике жидкости: сб. научн. тр. / АН СССР. Сиб. отд.-ние. Ин-т теор. и прикл. механ. - Новосибирск, 1983. - С. 124-144.
24. Christov C.I., Nartov V.P. On a bifurcation and emerging of a stochastic solution in a variational problem for poiseuille flows // Laminar-turbulent transition IUTAM symp. Novosibirsk, 1984. - Springer-Verlag, 1985. - P. 228-232.
25. Христов Х.И. Принцип наименьшей скорости диссипации энергии и возможность его применения к турбулентному течению в плоском канале / ДАН СССР. - 1979. - т. 245. - № 5. - С. 1071-1076.
26. Нартов В.П. Моделирование крупномасштабной структуры турбулентности точечными случайными функциями: Автореф. ... канд. физ.-мат. наук. - Новосибирск, 1988. - 18 с.
27. Browand F.K., Weidman P.D. Large scales in the developing mixing layer // J. Fluid Mech. - 1976. - v. 76. - P. 127-144.
28. Grigoryev Yu.N., Levinsky V.B. The model of vortex structures... // 17 Symp. on adv. probl. and meth. in fluid mech. abst. of countr. paper. - Warszawa, 1985.
29. Нартов В.П. Стохастический режим в слое смешения. - Новосибирск, 1986. - 39 с. - (Препринт / АН СССР. Сиб. отд.-ние. Ин-т теор. и прикл. механ.; № 24-86).
30. Нартов В.П., Христов Х.И. Структурная турбулентность в МГД течениях // Физическая механика неоднородных сред: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд.-ние. Ин-т теор. и прикл. механ. - Новосибирск, 1984. - С. 24.
31. Нартов В.П., Христов Х.И. Стохастический режим в течениях с медленным изменением структуры в продольном направлении // Моделирование процессов гидродинамики и энергетики: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд.-ние. Ин-т теор. и прикл. механ. - Новосибирск, 1985. - С. 143.
32. Шлихтинг Т. Теория пограничного слоя. - М.: Наука, 1974.
33. Кузнецов П.П., Стратонович Р.Л. К математической теории коррелированных случайных точек // Изв. АН СССР. - 1956. - серия математическая. - т. 20. - С. 167-178.
34. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. - М.: Советское радио, 1961.
35. Христов Х.И. Механико-математическое моделирование сплошных сред со случайной структурой: Автореф. ... докт. мат. наук. - София, 1986. - 52 с.
36. Winant G., Browand F. Vortex pairing: the mechanism of turbulent mixing layer growth at moderate Reynolds numbers // J. Fluid Mech. - 1974. - v. 63. - P. 237-255.
37. Hussein A.K.M.F., Zaman K.B.M.Q. An experimental study of organised motions in the turbulent plane mixing layer // J. Fluid Mech. - 1985. - v. 159. - P. 85-104.

38. Browand F.K., Troutt D. The turbulent mixing layer geometry of large vortices // J. Fluid Mech.-1985.-Vol.158.-P.489-509.
39. Wignanski I., Fiedler H. The two-dimensional mixing region // J. Fluid Mech.-1970.-Vol.41.-Pt.2.-P.327-361.

Институт теоретической  
и прикладной механики  
СО АН СССР  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
14 сентября 1988 г.  
После переработки  
25 ноября 1988 г.